

Modifizierungen der Produktionsfunktion
im neoklassischen Ein-Sektoren -Modell

Dissertation

vorgelegt der

Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz
zur Erlangung des Grades eines —
Doktors der Staatswissenschaften (Dr. rer. pol.)

von

Diplomvolkswirt

Gunter Baer

1968

Modifizierungen der Produktionsfunktion
im neoklassischen Ein-Sektoren-Modell.

D i s s e r t a t i o n
vorgelegt der
Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Staatswissenschaften (Dr. rer. pol.)

von
Diplomvolkswirt
Gunter Baer

1969



Erstberichterstatter: Prof. Dr. Klaus Rose
Zweitberichterstatter: Prof. Dr. Heinz Stöwe
Tag der mündlichen Prüfung: 20. Dez. 1968

GLIEDERUNG

1.	Einleitung.....	S.	1
2.	Der neoklassische Wachstumsprozeß auf der Grundlage verschiedener Produktionsfunktionen.....	S.	4
2.1.	Gleichgewicht und Stabilität des Wachstumspfad unter der Annahme einer Cobb-Douglas Funktion.....	S.	4
2.1.1.	Grundlegende Bemerkungen.....	S.	4
2.1.2.	Tatsächliche und gleichgewichtige Wachstumsrate des Volkseinkommens.....	S.	9
2.1.3.	Die Stabilität des Gleichgewichts.....	S.	14
2.1.4.	Die Dauer des Anpassungsprozesses.....	S.	26
2.1.5.	Die Entwicklung des Pro-Kopf-Einkommens und zu- sammenfassende Ergebnisse.....	S.	38
2.2.	Gleichgewicht und Stabilität des Wachstumsprozes- ses unter der Annahme einer linear-homogenen Pro- duktionsfunktion mit konstanter Substitutions- elastizität von ungleich Eins.....	S.	40
2.2.1.	Die Substitutionselastizität von ungleich Eins.....	S.	40
2.2.2.	Die allgemeinen Auswirkungen einer Substitutions- elastizität von ungleich Eins.....	S.	41
2.2.3.	Die Auswirkung der Substitutionselastizität auf den Wachstumspfad.....	S.	43
2.2.4.	Die CES-Funktion und ihre Eigenheiten.....	S.	45
2.2.5.	Gleichgewicht und Stabilität des Wachstums.....	S.	52
2.2.6.	Die Plausibilität eines neoklassischen Gleichge- wichtspfad unter der Voraussetzung einer CES- Funktion.....	S.	65
2.2.7.	Die Anpassungsgeschwindigkeit unter der Voraus- setzung einer CES-Funktion.....	S.	72

2.3.	Der Wachstumsprozeß auf der Grundlage einer nicht linear-homogenen Produktionsfunktion.....	S. 74
2.3.1.	Die Eigenschaften einer nicht linear-homogenen Produktionsfunktion.....	S. 74
2.3.2.	Tatsächliche und gleichgewichtige Wachstumsrate bei nicht linearer Produktionsfunktion.....	S. 76
2.3.3.	Gleichgewichtiges Wachstum und Stabilität unter der Annahme von 'increasing returns to scale'.....	S. 78
2.3.4.	Gleichgewicht und Stabilität des Wachstums unter der Annahme von 'decreasing returns to scale'.....	S. 83
2.3.5.	Die Beurteilung der nicht linear-homogenen Produktionsfunktion für das neoklassische Wachstumsmodell	S. 85
3.	Der Wachstumsprozeß unter der Berücksichtigung steigenden technischen Wissens.....	S. 88
3.1.	Die Erweiterung des neoklassischen Modells mit zwei Faktoren um in der Zeit konstant wachsendes technisches Wissen.....	S. 88
3.1.1.	Grundlegende Bemerkungen.....	S. 88
3.1.2.	Die Wachstumsrate und das Gleichgewicht.....	S. 91
3.1.3.	Die Stabilität des Gleichgewichts.....	S. 95
3.1.4.	Die zeitliche Dauer des Anpassungsprozesses.....	S. 96
3.2.	Die Neutralität des technischen Fortschritts.....	S. 99
3.2.1.	Die verschiedenen Verbreitungsmöglichkeiten des technischen Fortschritts.....	S. 99
3.2.2.	Mögliche Definitionen der Neutralität des Fortschritts.....	S. 101
3.2.3.	Technischer Fortschritt und Cobb-Douglas Funktion..	S. 109
3.2.4.	Die gleichgewichtigen Wachstumsraten bei alternativen Formen des technischen Fortschritts.....	S. 118
3.2.5.	Die Bedeutung der Neutralität des technischen Fortschritts im Rahmen der neoklassischen Wachstumstheorie.....	S. 124

3.3.	Gleichgewichtiges Wachstum und induzierter technischer Fortschritt.....	S. 126
3.4.	Neoklassisches Wachstum und kapitalgebundener technischer Fortschritt.....	S. 132
3.4.1.	Die aus der Verwendung kapitalgebundener technischer Fortschritts für die Wachstumstheorie entstehenden Probleme.....	S. 133
3.4.2.	Die verschiedenen Ansatzpunkte der Vintage-Modelle.	S. 134
3.5.	Der putty-putty Vintage-Fall.....	S. 137
3.5.1.	Die Entwicklung des einzelnen Maschinenjahrgangs...	S. 137
3.5.2.	Die Ausdehnung der Betrachtung auf alle in Betrieb befindliche Jahrgänge.....	S. 141
3.5.3.	Die Aggregation des Kapitalstocks und die Ableitung einer gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion...	S. 142
3.5.4.	Der Gleichgewichtspfad und die Bedingungen einer störungsfreien Entwicklung des Volkseinkommens.....	S. 145
3.6.	Der putty-clay Vintage-Fall.....	S. 149
3.6.1.	Die aus der putty-clay Bedingung erwachsenden Modifizierungen.....	S. 149
3.6.2.	Die Wahl der Produktionsmethode und die Bedingungen des gleichgewichtigen Wachstums.....	S. 150
3.6.3.	Die Bestimmung des Parameters Lebensdauer.....	S. 154
3.6.4.	Der Wachstumsprozeß bei ökonomisch begrenzter Lebensdauer der Anlagen.....	S. 157
3.6.5.	Gleichgewichtiges Wachstum und physische Abnutzung der Anlagen.....	S. 161
3.6.6.	Die Behandlung der Lebensdauer als Variable, ihre Kennzeichnung durch unternehmerische Entscheidungen	S. 167
3.6.7.	Die Abhängigkeit der Produktionsmethode von der Höhe der Faktorpreise.....	S. 166
3.6.8.	Das Verhältnis der entscheidenden Variablen zueinander.....	S. 181

3.6.9. Gleichgewichtiges Wachstum bei alternativer Höhe der Determinanten der Lebensdauer.....	S. 184
3.6.10. Die Beziehungen zwischen Zins und Lebensdauer.....	S. 188
3.6.11. Die Beziehungen zwischen Einkommensverteilung, Zins und Lebensdauer.....	S. 191
3.6.12. Die Beziehungen der Sparquote zu den anderen Va- riablen und ihre Auswirkung auf das Einkommens- niveau.....	S. 195
3.7. Der clay-clay Vintage-Fall.....	S. 199
3.7.1. Die aus der Annahme der ex-ante und ex-post Limi- tationalität erwachsenden Eigenheiten.....	S. 200
3.7.2. Die Ableitung der gleichgewichtigen Wachstumsrate.	S. 205

1. Einleitung

Im Versuch, den komplexen Vorgang des wirtschaftlichen Wachstums zu durchdringen und theoretisch zu deuten, muß man sich von vornherein darüber klar sein, daß alle Bemühungen hierzu nur Stückwerk bleiben werden. Zu vielfältig ist die Zahl der einflußnehmenden Variablen, zu unbestimmt ihre gegenseitige Abhängigkeit, als daß es gelänge, den Wachstumsprozeß in einem allgemeingültigen Modell zu beschreiben. Diese Erkenntnis darf jedoch nicht zur Resignation führen, die vielleicht sogar in der Ablehnung jeder wachstumstheoretischen Analyse gipfelt. Ein solcher Schritt wirft nämlich konsequenterweise die Frage nach dem Sinn und der Notwendigkeit der Wirtschaftstheorie überhaupt auf, da eine ähnliche Problematik - wenn vielleicht auch in weniger exponierter Form - in allen Bereichen wirtschaftstheoretischer Untersuchungen wiederzufinden ist. Aber auch ohne diese Frage zu beantworten, läßt sich eine Berechtigung der Wachstumstheorie daraus ableiten, daß sie wie viele andere Wissenschaftsbereiche, deren Sinn und Notwendigkeit bislang nicht voll zu erfassen ist, durch ihre Forschung für andere Gebiete wesentliche Erkenntnisse geliefert hat. Dieser pragmatische Gesichtspunkt findet sich auch in der Diskussion des 'Für und Wider' der wachstumstheoretischen Analyse, die sich gerade in den vergangenen Jahren für die Produktions- und Kapitaltheorie als äußerst befruchtend erwiesen hat. Wie wenig sich die wissenschaftliche Forschung durch die Schwierigkeiten hat tatsächlich stören lassen, beweist die fast unermeßliche Zahl der Veröffentlichungen zur Wachstumstheorie in der jüngsten Vergangenheit.

Die Vielzahl der Publikationen ist wiederum nur das äußerliche Spiegelbild der verschiedenartigen Ansatz- und Modifizierungsmöglichkeiten, die ihrerseits selbst als ein Indiz der Problematik wachstumstheoretischer Untersuchungen gewertet werden können. Dies äußert sich auch in dem hohen Abstraktionsgrad der Modelle, die meist nur mit Hilfe komplizierter mathematischer Formulierungen herzuleiten sind. Der Nachteil dieser Methode liegt auf der Hand: eine anschauliche ökonomische Interpretation ist nur noch in Ausnahmefällen möglich. Hier soll dennoch versucht werden, im Rahmen der neoklassischen Variante der modernen Wachstumstheorie in ab-

gewogenem Maße eine exakte mathematische Erfassung des Systems gegenseitig abhängiger Variabler mit einer verbalen Deutung der wirtschaftlichen Zusammenhänge zu verbinden.

Wenn die Aufgabe lautet, einem verhältnismäßig einfachen Grundmodell, das unter restriktiven Annahmen die Bedingungen einer störungsfreien Entwicklung des Volkseinkommens aufzeigt, durch Modifizierung der Produktionsfunktion etwas größere Realitätsnähe zu verleihen, so ist eine ökonomische Interpretation mathematisch erfassbarer Kausalitäten unerlässlich. Dabei ergibt sich zwangsläufig die Frage nach der Auswahl der zu behandelnden Problemkreise. Die Interdependenz der Probleme birgt im Rahmen der Beschränkung die Gefahr einer teilweise oberflächlichen Diskussion von Einzelheiten, so daß es notwendig wird, zur Wahrung einer gewissen Disziplin ein System schwerpunktartig einander zugeordneter Gesichtspunkte herauszukristallisieren. Die Form dieses Systems unterliegt der subjektiven Betrachtungsweise desjenigen, der die Materie zu erfassen trachtet und kann folglich keinen Anspruch auf Endgültigkeit besitzen. Für die vorliegende Untersuchung bedeutet das, daß beispielsweise alle Probleme der Konsummaximierung, Vergleiche zu anderen wachstumstheoretischen Ansätzen und die Ausdehnung auf Mehrsektorenmodelle unterbleiben müssen. Aber auch ohne diese weiterführenden Ansätze können verschiedene Probleme selbst im engen Rahmen des Themas nur berührt werden, ohne eine endgültige Lösung zuzulassen. Alle Modifizierungsversuche betreffen nur das neoklassische Grundmodell und verharren streng in dem dort gesetzten Prämissenkranz, so daß allein konstantes, exogen bestimmtes Arbeitswachstum und eine unveränderte, verteilungsunabhängige Sparquote Relevanz besitzen. Damit ist auch ein gewisser Untersuchungsgang vorgeschrieben. Vom Ansatzpunkt eines einfachen neoklassischen Wachstumsmodell ausgehend, steht im ersten Teil die zugrundegelegte Produktionsfunktion im Vordergrund der Analyse. Es gilt dabei, diese Produktionsfunktion zu modifizieren und die daraus erwachsenden Folgen für den neoklassischen Gleichgewichtspfad festzustellen. Im anschließenden zweiten Teil verschiebt sich dagegen die Perspektive der Betrachtung auf den die Produktionsfunktion erweiternden technischen Fortschritt. Hier sind jetzt vor allem Einbaumöglichkeiten des Fortschritts in die Produktionsfunktion und

der Charakter des technischen Wissens von Interesse. Gerade in diesem Teil kommt die unterschiedliche Gewichtung der Problemkreise zum Tragen. Aus Gründen der Realitätsnähe und der Bedeutung für die neuere Kapitaltheorie wird so besonders dem kapitalgebundenen technischen Fortschritt ein Großteil der Untersuchung gewidmet, wobei sich der Verfasser durchaus bewußt ist, daß sich für die Herausstellung der anderen Charakteristika ebenfalls eine Reihe bedeutsamer Gründe anführen läßt.

2. Der neoklassische Wachstumsprozeß auf der Grundlage verschiedener Produktionsfunktionen.

2.1. Gleichgewicht und Stabilität des Wachstumspfades unter der Annahme einer Cobb-Douglas Funktion.

2.1.1. Grundlegende Bemerkungen.

Der Grundstein für die moderne Wachstumstheorie wurde in den 40er Jahren dieses Jahrhunderts gelegt, als R. F. Harrod¹⁾ und E. D. Domar²⁾ unabhängig voneinander den Versuch einer Dynamisierung des Keynes'schen Systems unternahmen. Ihre Weiterentwicklung der kurzfristigen Betrachtungsweise zu einer langfristigen Analyse, zunächst als Antithese zu Keynes aufgefaßt, wurde eine der auch heute noch wesentlichsten Richtungen wachstumstheoretischer Untersuchungen. Die Modelle gründen sich jedoch auf derart restriktive Annahmen, daß ihre Ergebnisse nur mit jener rohen Bleistiftskizze zu vergleichen sind, "die es uns zwar gestattet, das Gesicht einer Person zu erkennen, die es aber nicht erlaubt, dieses Gesicht mit Sicherheit als das Eisenhowers, Strawinskys oder als das des Großen Kurfürsten zu identifizieren"³⁾. Aus der Kritik an diesen einfachen Modellen erwuchs eine zweite, vielleicht noch bedeutsamere Betrachtungsweise, nämlich die angebotsorientierte, neoklassische Wachstumstheorie.

Die Vertreter der auf Harrod und Domar begründeten Richtung, heute kurz als 'Postkeynesianer' bezeichnet, stellen ihre Untersuchung streng im Keynes'schen Sinne auf ein unternehmerisches Gleichgewicht ab⁴⁾, welches die gleichförmige Entwicklung von Angebot und Nachfrage voraussetzt. Vor allem die frühen Ansätze verbinden das mit einer nur unvollständigen Erfassung der Angebotsseite, auf der allein das Realkapital für die zukünftige Entwicklung entscheidend ist. Weitere Produktionsfaktoren wie Arbeit und technischer Fortschritt werden als komplementäre Faktoren zum Kapital aufgefaßt, ohne direkt über eine Produktionsfunktion ins Modell

1) Harrod, R.F., Dynamische Wirtschaft, Wien 1949.

Harrod, R.F., An Essay in Dynamic Theory, in: The Economic Journal, Vol. 49, 1939, S. 14 ff.

2) Domar, E.D., Essays in the Theory of Economic Growth, New York 1957.

3) Ott, A.E., Produktionsfunktion, technischer Fortschritt und Wirtschaftswachstum, in: Einkommensverteilung und technischer Fortschritt, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 17, Berlin 1959, S.157.

4) Bombach, G., Wirtschaftswachstum, in: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften, Bd. 12, Tübingen-Göttingen 1965, S. 766.

aufgenommen zu werden. Der damit verbundene limitationale Faktoreinsatz ist letztlich Ursache des instabilen Wachstumspfad. Die unvollständige Behandlung der Angebotsseite in Verbindung mit dem 'knife-edge'-Wachstum wurde zum Ansatzpunkt der neoklassischen Richtung, die mit Hilfe produktionstheoretischer Überlegungen versucht, eine störungsfreie Entwicklung des Volkseinkommens allein von der Angebotsseite her zu formulieren. Die Nachfrageseite erfährt dabei keiner besonderen Beachtung, die Aufnahme der Produktion durch die Nachfrage wird durch Unterstellung der Gültigkeit des Sayschen Theorems als gelöst angesehen.

Rückt so die Angebotsseite in den Mittelpunkt der Wachstumsanalyse, so gewinnt die zugrundegelegte Produktionsfunktion entscheidend an Bedeutung. Die Zusammenhänge zwischen Faktoreinsatz und Output, die Abhängigkeit der Faktoreinsätze von der Höhe der Faktorpreise und die daraus resultierende Einkommensverteilung verlangen eine eindeutige Klärung. Die Vertreter der angebotsorientierten Wachstumstheorie bedienen sich dabei der Grenzproduktivitätstheorie, d.h. die Faktoreinsätze werden so lange durchgeführt, wie die Grenzproduktivität der Faktoren noch über ihrem realen Faktorpreis liegt. Die Auswirkung alternativer Faktoreinsätze auf das Gesamtprodukt wird durch eine - bei Harrod explizit noch nicht vorhandene - makroökonomische Produktionsfunktion beschrieben. Die Aussagekraft und die Leistungsfähigkeit der neoklassischen Wachstumstheorie steht und fällt dann natürlich mit der Realitätsbezogenheit der Produktionsfunktion. Jede Annäherung an die Wirklichkeit jedoch ist, wie überall im Bereich der Wirtschaftstheorie, nur unter einem wesentlich höheren Schwierigkeitsgrad der Modelle zu erreichen, der oftmals die Interpretationsmöglichkeit einschränkt.

Die frühesten Ansätze der neoklassischen Wachstumstheorie begnügten sich deshalb mit jener Kompromißlösung der Cobb-Douglas Funktion, die zwar nicht allen empirischen Überprüfungen stand gehalten hat, gleichzeitig jedoch durch ihre mathematisch einfache Handhabung verhilft, wichtige ökonomische Implikationen eines sich auf diese Funktion begründenden Wachstumsprozesses zu erkennen.

Um dieses Instrumentarium der neoklassischen Wachstumstheorie kennenzulernen, seien kurz die entscheidenden Werkzeuge und ihre

ökonomische Bedeutung aufgezeigt.

Angenommen das gesamtwirtschaftliche Produktionsergebnis (=Einkommen) Y wird allein durch die Produktionsfaktoren Arbeit L und Kapital K determiniert, so lautet die zugrundezulegende Produktionsfunktion in allgemeinste Schreibweise:

$$(1) \quad Y = F(K, L).$$

Die Beziehungen zwischen Y , K und L , beschrieben durch die Rechenvorschrift F in (1), weise aus Vereinfachungsgründen die folgenden Eigenschaften auf:

- a) Bei einer Erhöhung der Variablen K und L um einen bestimmten Prozentsatz p steige der Wert der Funktion selbst um eine Potenz q der Erhöhung um p -Prozent: $p^q Y = F(pK, pL)$. Diese Eigenart der Funktion bezeichnet man als Homogenität.
- b) Hat die Potenz q genau den Wert Eins, so stellt (1) eine linear-homogene Produktionsfunktion dar, bei der eine Erhöhung der Faktoreinsätze um p -Prozent das Einkommen um denselben Prozentsatz ansteigen läßt¹⁾.

Sind die Produktionsfaktoren gegenseitig substituierbar, so lassen sich die partiellen Grenzproduktivitäten der Faktoren aus (1) durch partielle Ableitung gewinnen. Dabei sei angenommen, daß entsprechend der Grenzproduktivitätstheorie $\frac{\partial Y}{\partial K}$ und $\frac{\partial Y}{\partial L}$ zwar positiv, jedoch kleiner als Eins sind. Die Vermehrung nur eines Faktors läßt folglich das Einkommen nur unterproportional anwachsen:

$$(2) \quad \frac{\partial Y}{\partial K} > 0 ; \quad \frac{\partial Y}{\partial L} > 0.$$

Da die Ertragszuwächse mit steigendem partiellen Faktoreinsatz kleiner werden, ergibt sich für die zweite partielle Ableitung aus (1):

$$(3) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0 ; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0.$$

Wenn es sich in Gleichung (1) um eine linear-homogene Funktion handelt, dann gilt nach dem Eulerschen Theorem die fol-

¹⁾ Allen, R.G.D., Mathematik für Volks- und Betriebswirte, Berlin 1956, S. 326 f.

gende Beziehung¹⁾:

$$(4) \quad Y \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot L$$

Diese linear-homogene Funktion selbst ist in ökonomischer Interpretation Ausdruck von 'constant returns to scale' bzw. konstanten Niveaugrenzprodukten²⁾. In Verbindung mit vollständiger Konkurrenz bestätigen diese konstanten Skalenerträge die Gültigkeit des 'Adding-up-Theorems', nach dem das erstellte Einkommen voll auf die zu seiner Produktion notwendigen Faktoren verteilt wird. Das wird durch Formulierung (4) verdeutlicht.

Alle diese Eigenschaften ermöglichen in Verbindung mit der Grenzproduktivitätstheorie eine formal recht einfache Darstellung eines aufgrund von Faktorzuwächsen ansteigenden Volkseinkommens. Die wohl bekannteste und empirisch getestete Produktionsfunktion der linear-homogenen Form ist die Ende der 20er Jahre von C.W. Cobb und P.H. Douglas aufgestellte Funktion:

$$(5) \quad Y = K^{\alpha} L^{\beta} \quad 3)$$

Aus Vereinfachungsgründen kann hier auf den konstanten Maßstabsfaktor b der ursprünglichen Formulierung durch die Wahl von $b = 1$ verzichtet werden. Das Sozialprodukt Y ist nach (5) in bestimmter, durch die konstanten Exponenten α und β charakterisierten Weise abhängig vom Umfang der Einsatzmengen der Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital⁴⁾. Gleichung (5) erfüllt dann die Bedingung der Linear-Homogenität, wenn sich diese Exponenten zu Eins ergänzen. Wenn α und β für den Umfang des Beitrages der Faktoren zum Volkseinkommen verantwortlich sind, so muß ihr Einfluß bei partieller Faktoreinsatzvariation zum Ausdruck kommen. Das läßt sich am Beispiel einer Erhöhung des Arbeitseinsatzes nachweisen, indem Gleichung (5) partiell nach L abgeleitet wird. Die Grenz-

1) Allen, R. G. D., Mathematik für...a.a.O., S. 329.

2) Schneider, E., Einführung in die Wirtschaftstheorie, Bd.II: Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft, 8. Aufl., Tübingen 1963, S. 168.

3) Cobb, C.W. und Douglas, P.H., A Theory of Production, in: The American Economic Review, Vol 18, Papers and Proceedings, S. 139ff.

4) Schmidt, K.-U., Graphisch-mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaften, Meisenheim, S.175.

produktivität der Arbeit ergibt sich als

$$(6) \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta L^{\beta-1} \cdot K^{\alpha}$$

und hängt demnach eindeutig von dem Exponenten β ab. Aus (6) läßt sich nun dieses β leicht eliminieren, wenn Funktion (5) durch L dividiert und zu (6) ins Verhältnis gesetzt wird:

$$(7) \quad \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = \beta.$$

Nach (7) regelt der Exponent β folglich den technischen Zusammenhang zwischen Arbeitseinsatz und seinem Beitrag zum Produktionsergebnis und determiniert damit, inwieweit ein höherer Arbeitseinsatz zur Steigerung des Einkommens führt. Da wegen der Linear-Homogenität der Produktionsfunktion (5) β immer kleiner, höchstens gleich Eins sein muß, können mit Hilfe partieller Faktoreinsatz-erhöhungen nur unterproportionale Zunahmen des Einkommens erzielt werden. Diese technische Beziehung zwischen Faktoreinsatz- und Einkommensänderung in (7) bezeichnet man als die Produktionselastizität der Arbeit. Analog läßt sich auch die des Kapitals als

$$(8) \quad \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha$$

ableiten. Da α und β kleiner als Eins sind, postuliert die Cobb-Douglas Funktion das Gesetz der abnehmenden Grenzerträge.

Da - wie bereits angedeutet - im Rahmen der hier gemachten Annahmen das 'Adding-up-Theorem' Gültigkeit besitzt, muß der reale Beitrag der Faktoren, gemessen durch ihre Produktionselastizität, auch ihrem Anteil am Volkseinkommen entsprechen. Diese Übereinstimmung wird an Hand von (7) und (8) deutlich, wenn die mit den realen Faktorpreisen identischen Grenzproduktivitäten der Faktoren $\frac{\partial Y}{\partial K}$ und $\frac{\partial Y}{\partial L}$ durch den realen Zins r und den Reallohn l ersetzt werden:

$$(9) \quad \frac{l \cdot L}{Y} = \beta ; \quad \frac{r \cdot K}{Y} = \alpha.$$

Die gesamte eingesetzte Arbeit L multipliziert mit dem Reallohn l ergibt das Arbeitseinkommen. Ins Verhältnis zum Gesamteinkommen

gesetzt folgt daraus die Lohnquote; für α entsprechend die Zinsquote.

Bleiben in (5) definitionsgemäß die Exponenten α und β konstant, so werden folglich die Produktionselastizitäten und die Einkommensanteile der Faktoren in der Zeit aufrechterhalten. Die ökonomische Voraussetzung hierzu ist eine konstante Substitutionselastizität ϵ von Eins, denn nur dann, wenn Veränderungen des Grenzproduktivitäts- bzw. des Faktorpreisverhältnisses durch inverse Reaktionen im Kapital-Arbeitseinsatzverhältnis genau kompensiert werden, können bei jeder beliebigen Kapitalintensität die Einkommensanteile unverändert bleiben. Diese Beziehung zwischen Veränderung des Faktoreinsatzverhältnisses und Veränderung des Faktorpreisverhältnisses werden durch die Substitutionselastizität gemessen. Nur wenn ϵ einem Wert von Eins entspricht, wird die durch eine Erhöhung des Zins-Lohn-Verhältnisses herbeigeführte Kapitalintensitätsverminderung jenes Ausmaß erreichen, welches notwendig ist, das Produkt der Relationen $\frac{K}{L} \cdot \frac{r}{w}$ konstant zu halten.

Auf der Grundlage der alle diese Eigenschaften einschließenden Produktionsfunktion soll nun im folgenden das einfachste neoklassische Wachstumsmodell abgeleitet werden.

2.1.2. Tatsächliche und gleichgewichtige Wachstumsrate des Volkseinkommens.

Bildet die Produktionsfunktion (5) die Grundlage einer angebotsorientierten Wachstumstheorie, so kann eine Erhöhung des Sozialproduktes Y einzig und allein durch positive Faktoreinsatzvariation in der Zeit hervorgerufen werden. "Das Wachstum resultiert aus der Angebotsentwicklung der einzelnen Faktoren; bei gegebenen Nachfragefunktionen bilden sich die Preise nach diesem Angebot. Das impliziert die Wirksamkeit des Sayschen Gesetzes"¹⁾. Unterstellt man ohne nähere Kennzeichnung eine in der Zeit positive Entwicklung der Arbeit und des Kapitals, so läßt sich aus Gleichung (5) durch Differentiation nach t die Veränderung des Einkommens in allgemeiner Form ableiten. Das totale Differen-

1) Riese, H., Faktoreinsatz, technischer Fortschritt und Produktivität, Basel 1966, S. 10/11.

tial dY/dt ergibt sich:

$$(10) \quad \frac{dY}{dt} = \alpha K^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} \cdot \frac{dK}{dt} + \beta L^{\beta-1} \cdot K^{\alpha} \cdot \frac{dL}{dt}.$$

Die Wachstumsrate des Einkommens folgt aus der Division von (10) durch die Ausgangsgleichung (5):

$$(11) \quad \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{Y} = \alpha \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K} + \beta \frac{dL}{dt} \cdot \frac{1}{L}.$$

Die Wachstumsraten lassen sich vereinfachend durch das Symbol w ausdrücken:

$$(12) \quad w_Y = \alpha w_K + \beta w_L.$$

Nach (12) bestimmt sich die allgemeine Wachstumsrate des Einkommens unter der Voraussetzung einer Cobb-Douglas Funktion und in der Zeit steigender Faktoreinsätze als Summe der Wachstumsraten des Faktorangebots gewichtet mit ihren Produktionselastizitäten. Formulierung (12) sagt jedoch noch nichts über einen Gleichgewichtspfad mit konstanter Rate w_Y aus, denn dazu sind weitere Annahmen über die Entwicklung von Kapital und Arbeit notwendig. Ist beispielsweise die Erwerbsbevölkerung ein gleichbleibender Teil der gesamten Bevölkerung und entwickelt sich diese in der Zeit mit einer exogen bestimmten Rate n , so ist w_L in (12) durch n determiniert. Sind somit die Determinanten der Wachstumsrate des Einkommens mit Ausnahme der Wachstumsrate des Kapitals konstant, so wird die tatsächliche Rate w_Y in (12) in eine störungsfreie übergehen, wenn auch die Zuwächse zum Kapitalstock in gleichbleibendem Prozentsatz erfolgen. Die Konstanz der Wachstumsrate des Einkommens als Definition einer störungsfreien oder gleichgewichtigen Entwicklung entspricht der ganz allgemeinen Vorstellung, daß sich die Variablen des Modells, d.h. die Wachstumsraten, genau dann in einer Gleichgewichtslage befinden, wenn ihre Werte nur noch von den Daten des Modells bestimmt werden¹⁾. Im Wachstumsgleichgewicht müssen die Wachstumsraten unabhängig von der historischen Entwicklung sein und nur noch durch die konstante Daten-

1) Vogt, W., Theorie des wirtschaftlichen Wachstums, Berlin und Frankfurt 1968, S. 11.

struktur - ausgedrückt durch die Parameter des Modells - determiniert sein. Die Konstanz der Datenstruktur verlangt nun den Ausschluß kurzfristiger Störungen, d.h. die Übereinstimmung von geplanter Ersparnis und geplanter Investition. Eine exogen bestimmte Entwicklung des Kapitalstocks - ähnlich dem Arbeitswachstum - ist damit ausgeschlossen, die Wachstumsrate des Kapitals muß in entscheidendem Maße durch die gesamtwirtschaftliche Sparquote s mitbestimmt werden.

Wenn der Faktor Kapital eine unendlich lange physische und ökonomische Lebensdauer besitzt, ist es nicht notwendig, zwischen Brutto- und Nettoinvestitionen zu unterscheiden. Der Zuwachs zum Kapitalstock wird durch die verteilungsunabhängige Sparquote und die Höhe des Einkommens determiniert, so daß für w_K folgende Beziehungen herrschen:

$$(13) \quad w_K = \frac{dk}{dt} \cdot \frac{1}{K} = J \cdot \frac{1}{K} = S \cdot \frac{1}{K} = s \cdot Y \cdot \frac{1}{K} = s \cdot \frac{Y}{K}.$$

Offensichtlich kann nunmehr die Wachstumsrate des Kapitals nur dann invariant sein, wenn neben der Sparquote auch die durchschnittliche Kapitalproduktivität in der Zeit unverändert bleibt. Im Fall des Wachstumsprozesses verlangt letzteres die Übereinstimmung der Wachstumsraten von Einkommen und Kapital. Nach Gleichung (12) ist die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens nur bei konstantem w_K auch die gleichgewichtige Rate. Die Wachstumsrate des Kapitals wiederum kann nur bei Übereinstimmung mit w_Y konstant sein. Hieraus ergibt sich ein Ansatzpunkt, die Bedingung für eine Gleichgewichtsrates abzuleiten. Diese Bedingung wird entscheidend durch die Annahme der Cobb-Douglas Funktion mit zwei den Output determinierenden Faktoren geprägt, denn definitionsgemäß kann das Einkommen nur dann um einen konstanten Prozentsatz anwachsen, wenn auch beide Faktoren proportional um diesen Prozentsatz vermehrt werden. Die konstante Wachstumsrate des Kapitals verlangt die Identität von w_Y und w_K ; die dazu notwendige Höhe der Wachstumsrate des Einkommens läßt sich aus Gleichung (12) unter Verwendung von $z = w_K = w_Y$ ableiten¹⁾:

$$z = \alpha z + \beta n$$

$$(14) \quad z = n = w_Y = w_K.$$

1) Meade, J.E., A Neo-Classical Theory of Economic Growth, 2.Aufl., London 1962, S. 35.

Gleichung (14) kennzeichnet die Bedingung einer störungsfreien Entwicklung des Volkseinkommens im einfachsten neoklassischen Wachstumsmodell. Nur wenn Einkommen und Kapital die gleiche Wachstumsrate wie die der Arbeit aufweisen, wird die Wachstumsrate des Kapitals konstant bleiben, da die Kapitalproduktivität dann bei einem unveränderten Wert verharret. Das wiederum ist im Rahmen der Prämissen die Voraussetzung für das gleichgewichtige Wachstum des Einkommens. Jede andere Konstellation mit $n \neq z$ ist äußeres Zeichen eines Ungleichgewichts, da einer der Faktoren K oder L überproportional eingesetzt wird. Die linear-homogene Form der Produktionsfunktion bewirkt dann eine Veränderung der Wachstumsrate des Einkommens in der Zeit.

Die tatsächliche Wachstumsrate

$$(15) \quad w_Y = \alpha \cdot s \cdot \frac{Y}{K} + \beta n$$

erfordert für den Gleichgewichtspfad die Konstanz der Kapitalproduktivität, welche nur nach Bedingung (14) bei Übereinstimmung von w_Y und w_K gewährleistet ist. An Hand von Abbildung 1 lassen sich diese Zusammenhänge verdeutlichen¹⁾:

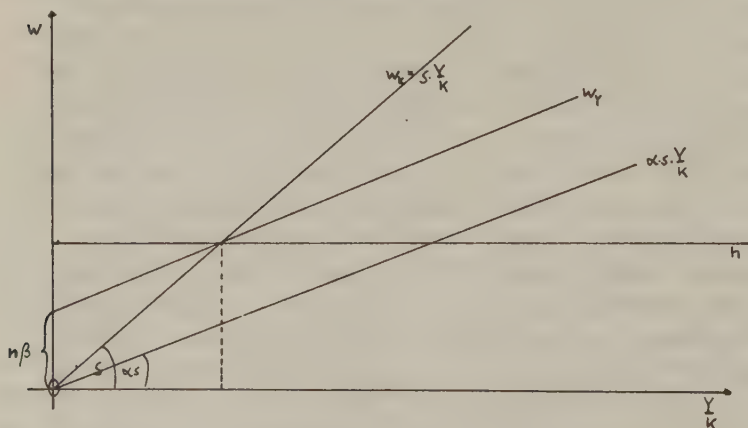


Abb. 1

Dazu werden auf der Ordinate die einzelnen Wachstumsraten, auf der Abszisse die Kapitalproduktivität abgetragen. Unter der Annahme

1) Swan, T.W., Economic Growth and Capital Accumulation, in: The Economic Record, Vol. 32, 1956, S. 335 f.

einer konstanten Sparquote bestimmt die $\frac{Y}{sK}$ -Linie alternative Wachstumsraten des Kapitals bei unterschiedlichen Werten der Kapitalproduktivität. Multipliziert mit der Produktionselastizität des Kapitals ($\alpha < 1$) determiniert die $\alpha \frac{Y}{sK}$ -Linie den Beitrag des wachsenden Kapitaleinsatzes zum Wachstum des Sozialproduktes. Die exogene Wachstumsrate des Arbeit n ist unabhängig von der Höhe der Kapitalproduktivität und verläuft deshalb parallel zur Abzisse. Der reale Beitrag des Arbeitswachstums zum Einkommenswachstum hängt von der Höhe der Produktionselastizität β ab ($\beta < 1$). Ist die Kapitalproduktivität gleich Null, d.h. auch die Wachstumsrate des Kapitals ist gleich Null, dann bestimmt das Produkt aus β und n den Ansatzpunkt der w_Y -Linie auf der Ordinate. Diese tatsächliche Wachstumsrate kann jedoch nur kurzfristig bestehen, da die Einkommenszunahme eine Steigerung der Kapitalproduktivität über Null hinaus impliziert und somit über die darauf zurückzuführende positive Wachstumsrate des Kapitals Anstoß erhält, selbst anzusteigen. Die angestrebte Gleichgewichtssituation mit konstantem w_Y ist nur im Schnittpunkt der w_K -Linie und der n -Linie zu realisieren. Alle anderen Konstellationen der Wachstumsraten zueinander repräsentieren ungleichgewichtige Situationen, die eine Veränderung der Wachstumsrate des Einkommens herbeiführen. Bei exogen festgelegter Wachstumsrate der Arbeit und konstanter Sparquote muß für den Gleichgewichtspfad des Einkommens die Kapitalproduktivität in Abbildung 1 ihren konstanten (und damit auch gleichgewichtigen) Wert $(\frac{Y}{K})^*$ erreicht haben. Alle anderen Werte der Kapitalproduktivität kennzeichnen folglich ebenso wie das Auseinanderfallen der Wachstumsraten eine Situation als ungleichgewichtig. Voraussetzung hierfür ist natürlich die Konstanz von n und s .

Damit sind noch keine Aussagen über die Stabilität des Systems getroffen worden. Gleichung (15) bestätigt nur die Möglichkeit einer störungsfreien Wachstumsrate des Einkommens, sofern Bedingung (14) erfüllt ist. Bestehen dagegen zu irgend einem Zeitpunkt Divergenzen zwischen den Wachstumsraten von Arbeit und Kapital, so ist zu untersuchen, ob nach einem Anpassungsprozeß der Gleichgewichtswert der Kapitalproduktivität $(\frac{Y}{K})^*$ automatisch erreicht wird. Es stellt sich damit die Frage nach der Stabilität des Gleichgewichtspfades.

2.1.3. Die Stabilität des Gleichgewichts.

Zur Analyse der Stabilität eines Wachstumspfades bedient man sich am besten der formalen Darstellung der Zeitpfade von Y und K^1). Da in jedem Zeitpunkt t sich die Höhe des Sozialproduktes aus den in t eingesetzten Faktormengen ergibt, folgt aus (5):

$$(16) \quad Y_t = K_t^\alpha \cdot L_t^{(1-\alpha)}$$

Die eingesetzte Arbeitsmenge im Zeitpunkt t entspricht einem anfänglichen Arbeitsangebot L_0 , welches gemäß der Rate n auf L_t angewachsen ist:

$$(17) \quad L_t = L_0 e^{nt}$$

Unter Verwendung von (17) folgt aus (16):

$$(18) \quad Y_t = L_0^{1-\alpha} \cdot e^{n(1-\alpha)t} \cdot K_t^\alpha$$

Zu Beginn des Wachstumsprozesses wurde das Ausgangseinkommen Y_0 durch einen Arbeitseinsatz $L_0^{1-\alpha}$ und einen Kapitaleinsatz K_0^α determiniert, so daß sich in (18) $L_0^{1-\alpha}$ durch Y_0/K_0^α ersetzen läßt. Da weiterhin sY_t die Veränderung des Kapitalstocks dK/dt festlegt, folgt aus (18) zur Bestimmung des Zeitpfades der Kapitalentwicklung die Differentialgleichung:

$$(19) \quad \frac{dK}{dt} = s Y_0 \left(\frac{K_t}{K_0} \right)^\alpha \cdot e^{n(1-\alpha)t}$$

Wenn nun mit wachsendem t unabhängig von den Anfangswerten s und Y_0 die Wachstumsrate des Kapitalstocks allein durch die exogene Wachstumsrate der Arbeit festgelegt ist, wird der gleichgewichtige Wachstumspfad des Einkommens stabil sein, da er von jeder Ausgangssituation automatisch erreicht wird. Um die zur Überprüfung der Wachstumsrate des Kapitals notwendige Lösung der Differentialgleichung (19) zu erhalten, muß diese nach der Methode der Tren-

1) Vergl. hierzu: Richter, R., "Harrod-Wachstum" und "Solow-Wachstum", ein Vergleich, in: Zeitschrift für die Gesamte Staatswissenschaft, Bd. 121, 1965, S. 242 f.
 Meade, J.E., A Neo-Classical...a.a.O., S. 108 f.
 Allen, R.G.D., Macro-Economic Theory, New York 1967, S. 272.
 Elsner, K., Wachstums- und Konjunkturtheorie, in: Kompendium der Volkswirtschaftslehre, Bd. 1, Göttingen 1967, S. 282 f.

nung der Variablen integriert werden ¹⁾:

$$(20) \quad \int \frac{dK}{K^\alpha} = s \frac{Y_0}{K_0^\alpha} \cdot \int e^{n(1-\alpha)t}$$

$$(21) \quad \frac{1}{1-\alpha} \cdot K_t^{1-\alpha} = s \frac{Y_0}{K_0^\alpha} \cdot \frac{1}{n(1-\alpha)} e^{n(1-\alpha)t} + C.$$

Die Integrationskonstante C läßt sich durch die Anfangsbedingung in $t=0$ deuten:

$$C = \frac{1}{1-\alpha} \cdot K_0^{1-\alpha} - s \frac{Y_0}{K_0^\alpha} \cdot \frac{1}{n(1-\alpha)}$$

$$(22) \quad C = K_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0^\alpha}$$

Bevor nun C in (21) durch (22) ersetzt wird, ist es zweckmäßig, (21) folgendermaßen umzuformulieren:

$$K_t^{1-\alpha} = \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0^\alpha} \cdot e^{n(1-\alpha)t} + C$$

$$K_t = \left[\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0^\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}} + C$$

$$(23) \quad K_t = \left(\left[\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0^\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left[\frac{C}{e^{n(1-\alpha)t}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \cdot e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}$$

Wird nun C durch (22) eliminiert, so ergibt sich aus der ursprünglichen Differentialgleichung der Zeitpfad des Kapitals:

$$(24) \quad K_t = \left(\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0^\alpha} + \frac{K_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0^\alpha}}{e^{n(1-\alpha)t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}$$

Da $(1/K_0^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} = 1/K_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = K_0 \cdot (1/K_0)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, läßt sich aus (24) K_0 ausklammern:

$$(25) \quad K_t = K_0 \left(\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0}}{e^{n(1-\alpha)t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}$$

Gleichung (25) stellt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (19) dar. Der Zeitpfad des Kapitals von K_0 nach K_t ist unter den in 2.1.2. gemachten Voraussetzungen nur von t abhängig, da alle andere Größen in (25) definitionsgemäß in der Zeit konstant sind. Sie bestimmen nur, wie sich der Kapitalstock von irgendeinem Anfangswert entwickelt. Ob nun dieser Prozeß von Beginn

1) Allen, R.G.D., Mathematik für...a.a.O., S. 436.

an mit einer konstanten Wachstumsrate erfolgt, oder ob aber erst nach einer gewissen Anpassungszeit diese konstante Wachstumsrate verwirklicht wird, hängt allein von den Anfangswerten des Einkommens und des Kapitals - und damit auch von der ursprünglichen Kapitalproduktivität - ab.

Für den Nachweis der Stabilität des Systems genügt es, wenn die Wachstumsrate des Kapitals mit wachsendem t gegen ihren in (14) abgeleiteten Gleichgewichtswert konvergiert. Das wird deutlich, wenn in (25) der Zeitpfad des Kapitals für t gegen Unendlich betrachtet wird:

$$(26) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} K_t = K_0 \cdot B^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}$$

Mit $t \rightarrow \infty$ muß der zweite Summand in der Klammer in (25) gegen Null gehen, so daß sich die Klammer durch eine Konstante B ersetzen läßt. Die invarianten Größen K_0 und $B = s/n \cdot Y_0/K_0$ werden im Zeitablauf für das Wachstum des Kapitalstocks immer unbedeutender. Es ist daher genauso gut möglich, K_0 und B zu einer einzigen Konstanten zusammenzufassen. Die Trennung wird hier nur aufrechterhalten, um später leichter die gleichgewichtige Kapitalproduktivität ableiten zu können.

Die Wachstumsrate des Kapitals ist aus (26) durch die Ableitung nach t und Division dieses Ergebnisses durch (26) zu berechnen:

$$(27) \quad \frac{dK}{dt} \frac{1}{K} = \frac{K_0 \cdot B^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \frac{n(1-\alpha)}{1-\alpha} e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}}{K_0 \cdot B^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}} = \frac{n(1-\alpha)}{1-\alpha} = n = w_K$$

Die Wachstumsrate des Kapitals wird sich folglich nach unendlicher Anpassungszeit dem Wert der exogen festgelegten Wachstumsrate der Arbeit angleichen. Das neoklassische, gleichgewichtige Wachstum ist also stabil.

Mit Hilfe des Zeitpfades des Kapitals läßt sich auch der des Einkommens determinieren, wenn K_t in (18) durch (25) ersetzt wird:

$$(28) \quad Y_t = Y_0 \cdot \frac{1}{K_0^\alpha} \cdot e^{n(1-\alpha)t} \cdot K_0^\alpha \left(\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0}}{e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{\alpha n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}$$

$$(29) \quad Y_t = Y_0 \left(\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0}}{e^{\frac{n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot e^{nt}$$

Für (29) gelten dieselben Aussagen wie für (25). Aus dieser den Zeitpfad des Einkommens beschreibenden Gleichung läßt sich analog nach vollzogener Grenzbetrachtung für $t \rightarrow \infty$ die Wachstumsrate

$$(30) \quad \frac{dY}{dt} \frac{1}{Y} = n$$

ableiten. Es ist also unwichtig, wie die in (25) bzw. (29) enthaltenen Parameter zueinander stehen, immer werden sich die Wachstumsraten von Kapital und Einkommen der der Arbeit angleichen. Dieser Anpassungsprozeß ist das äußere Zeichen einer augenblicklich ungleichgewichtigen Situation, die aber durch systemimmanente Kräfte beseitigt wird. Allerdings wird - und muß - während dieses Anpassungsprozesses die quantitative Entwicklung von Einkommen und Kapital divergieren, wie durch die unterschiedlichen Exponenten der ansonsten identischen Klammerausdrücke in (25) und (29) zum Ausdruck kommt. Da $\alpha < 1$, muß das Einkommen in der Zeit prozentual in geringerem Ausmaß variieren als das Kapital. Die Ursache hierfür ist abermals in der Annahme der linear-homogenen Funktion zu suchen, deren partielle Ableitungen zwar größer als Null, jedoch kleiner als Eins sind. Die ökonomische Interpretation wird diesen Sachverhalt noch verdeutlichen.

Zuvor sei jedoch aus den beiden Zeitpfaden jene Kapitalproduktivität abgeleitet, die eine störungsfreie Entwicklung des Volkseinkommens garantiert. Diese Kapitalproduktivität kann 'unter günstigen Voraussetzungen' entweder im Ursprung des Wachstumsprozesses bereits bestehen, oder aber mit $t \rightarrow \infty$ erreicht werden. Die tatsächliche Kapitalproduktivität ergibt sich durch Division von (29) durch (25)¹⁾:

$$(31) \quad \frac{Y_t}{K_t} = \frac{Y_0 \left(\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0}}{e^{\frac{n(1-\alpha)}{n} t}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot e^{nt}}{K_0 \left(\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0}}{e^{\frac{n(1-\alpha)}{n} t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{nt}} = \frac{Y_0}{K_0} \left(\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0}}{e^{\frac{n(1-\alpha)}{n} t}} \right)^{-1}$$

Für $t \rightarrow \infty$ folgt aus (31):

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y_t}{K_t} = \frac{Y_0}{K_0} \frac{1}{\frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0}}$$

$$(33) \quad \frac{Y}{K} = \frac{n}{s}$$

So wie sich die einzelnen Wachstumsraten einander annähern, gleicht

1) Richter, R., "Harrod-Wachstum" und ...a.a.O., S. 251

sich auch die Kapitalproduktivität dem Quotienten aus Wachstumsrate der Arbeit und Sparquote an. Ist dieser Wert erreicht, so entwickelt sich das Einkommen wiederum störungsfrei, so lange sich keine der autonom bestimmten Größen s oder/und n ändert. Tritt das ein, so führt ein neuer Anpassungsprozeß mit $t \rightarrow \infty$ zum Gleichgewicht mit $w_Y = w_K = n$ und $Y/K = n/s$.

Ist die Gleichgewichtssituation (33) erreicht, dann wächst der Kapitalstock ebenso wie das Einkommen mit der Rate n , wie sich durch Einsetzen von (33) in (25) und (29) zeigen läßt:

$$K_t = K_0 \left(\frac{s}{n} \frac{n}{s} + \frac{1 - \frac{s}{n} \frac{n}{s}}{e^{n(1-\alpha)t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{nt}$$

$$(34) \quad K_t = K_0 \cdot e^{nt}$$

Analog gilt für Y_t :

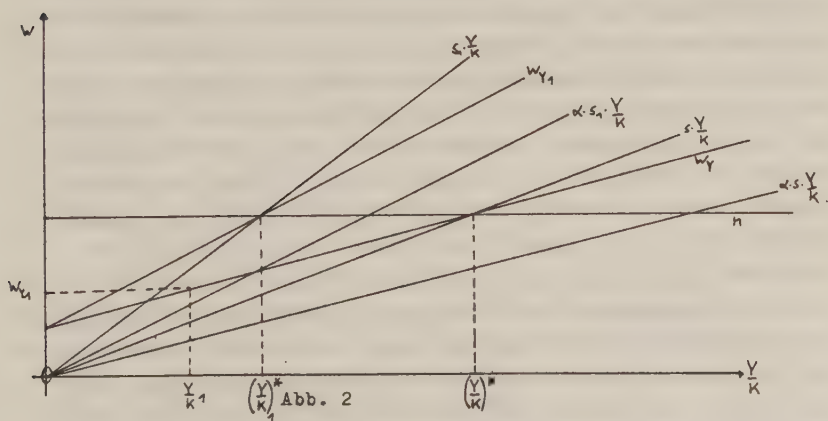
$$(35) \quad Y_t = Y_0 \cdot e^{nt}$$

Die ökonomische Interpretation dieses stabilen Gleichgewichts fällt nicht schwer, wenn man sich der Eigenheiten der zugrundegelegten Produktionsfunktion erinnert. Nur proportionale Faktormengenerhöhungen ermöglichen eine prozentual gleich hohe Steigerung des Einkommens. Auf den Wachstumsprozeß übertragen bedeutet das, daß die Zuwächse zum Einkommen nur dann konstante Prozentsätze betragen können, wenn auch beide Faktoren in entsprechendem Verhältnis kontinuierlich erhöht werden. Der Zuwachs zum Arbeitspotential ist exogen vorbestimmt und determiniert somit auch die gleichgewichtige Kapitalstockerhöhung. Diese gleichgewichtige Wachstumsrate des Kapitals ist bei konstanter Sparquote durch die Wahl einer gleichgewichtigen Kapitalproduktivität realisiert. Diese Kapitalproduktivität wird in ihrer Entwicklung wiederum durch die Wachstumsraten des Einkommens und des Kapitals bestimmt, so daß letztlich der zum exogenen Arbeitswachstum proportionale Zuwachs zum Kapital durch das gesamte Gebäude des Modells selbst determiniert ist. Die Tendenz zum Gleichgewicht erwächst aus der durch die abnehmenden Grenzerträge induzierten Veränderung der Kapitalproduktivität.

Ist beispielsweise die bestehende Sparquote in der Ausgangslage

zu 'gering', so daß in Verbindung mit der in diesem Augenblick existierenden Kapitalproduktivität die Wachstumsrate des Kapitals $w_K = s \frac{Y}{K}$ von der der Arbeit n übertroffen wird, dann kann das Einkommenswachstum mit dem der Arbeit nicht standhalten. Die abnehmenden Grenzerträge des überproportional vermehrten Faktors Arbeit machen sich bemerkbar. Bei vorgegebener Sparquote wird aber aus dem zwar relativ - zum Arbeitswachstum - gesunkenen, absolut jedoch gestiegenem Einkommen ein größerer Teil der Kapitalakkumulation zugeführt als es in früheren Perioden der Fall war. Die Wachstumsrate des Kapitals erhöht sich und nähert sich so schrittweise der der Arbeit an. Die Steigerung des Kapitalwachstums geschieht aufgrund der Zunahme der Kapitalproduktivität, da durch den überproportionalen Arbeitseinsatz das Einkommen gemessen am gewachsenen Kapitaleinsatz ebenfalls überproportional angestiegen ist. Diese Tendenz zur Erhöhung der Kapitalproduktivität wird mit wachsendem Zeitablauf jedoch immer geringer und verschwindet im Gleichgewicht vollständig.

In Abbildung 2 lassen sich diese Ungleichgewichtssituationen rechts und links der gleichgewichtigen Kapitalproduktivität $(\frac{Y}{K})^*$ durch die Linie w_Y verdeutlichen, die in allen denkbaren Situationen die Höhe der tatsächlichen (ungleichgewichtigen) Wachstumsrate des Einkommens widerspiegelt. Bei $\frac{Y}{K}=0$ ist die Wachstumsrate des Einkommens allein durch βn determiniert. Aber hier wächst das Einkommen



stärker als das Kapital ($w_Y > w_K$), so daß sich die Kapitalprodukti-

vität erhöht. Da jetzt auch der Faktor Kapital gemäß $\alpha \frac{Y}{K}$ zum Einkommenswachstum beiträgt, muß sich w_Y um diesen Teil erhöht haben, z. B. bei $\frac{Y}{K} 1$ auf w_{Y1} . Die zwischen den Wachstumslinien n und $s \frac{Y}{K}$ liegende Linie des tatsächlichen Einkommenswachstums teilt die vertikale Differenz genau im Verhältnis der Faktorbeiträge α und β ¹⁾. So lange nun die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens größer ist als die des Kapitals, herrscht die Tendenz, die Kapitalproduktivität zu erhöhen. Auf der Abzisse nähern sich die $\frac{Y}{K}$ -Werte ihrem Gleichgewichtswert $(\frac{Y}{K})^*$ von links. Rechts vom Gleichgewichtspunkt ist die Situation dagegen umgekehrt. Das über das Einkommenswachstum hinausgehende Kapitalwachstum hat abnehmende Grenzerträge des Kapitals zur Folge, die eine nur unterproportionale Einkommenssteigerung bewirken. Die Kapitalproduktivität kommt dadurch zum Sinken und ermöglicht eine Annäherung der zu 'hohen' Wachstumsrate des Kapitals an die der Arbeit.

Wenn der Gleichgewichtspfad des Einkommens folglich stabil ist, die Höhe der Wachstumsrate gleichzeitig allein durch das Arbeitswachstum determiniert wird, dann kann durch Zunahme der Sparquote auf die Dauer keine Steigerung der Wachstumsrate herbeigeführt werden. Das ist nur im Fall eines höheren (konstanten) Wachstums der Arbeitsbevölkerung möglich. Eine Zunahme der Ersparnisbildung, d.h. eine Erhöhung von s führt nur vorübergehend zur Steigerung des Einkommenswachstums, denn nach einem gewissen Anpassungsprozeß wird sie durch die proportional gesunkene Kapitalproduktivität genau kompensiert. Die überproportionalen Kapitaleinsätze infolge der höheren Sparquote lassen die Produktion wegen der sinkenden Grenzerträge des Kapitals nur unterproportional - gemessen an der Kapitalbildung - ansteigen. Dadurch vermindert sich $\frac{Y}{K}$, woraufhin die Wachstumsrate des Kapitals auf die durch das Arbeitswachstum vorbestimmte Höhe absinkt. Der korrespondierende Gleichgewichtspunkt bei s_1 wird in Abbildung 2 durch $(\frac{Y}{K} 1) < (\frac{Y}{K})^*$ beschrieben.

Wenn auch die Sparquote keinen endgültigen Einfluß auf die gleichgewichtige Wachstumsrate des Einkommens besitzt, so ist sie doch für die absolute Höhe des Einkommens verantwortlich. Formal wird das an Hand von Gleichung (29) deutlich, denn s geht in den Anfangswert Y_0 ein, so daß bei gleichgewichtiger Wachstumsrate Y_t

1) Swan, T.W., Economic Growth...a.a.O., S. 336

um so höher sein wird, je größer die anfängliche Sparquote ist. Derartige Überlegungen bilden den Ansatzpunkt zur Bestimmung eines Wachstumspfad mit maximalem Pro-Kopf-Konsum ("Golden Rate of Accumulation"¹⁾). Die damit verbundenen Probleme sollen jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein.

In diesem einfachsten neoklassischen Modell wird der Gleichgewichtspfad dadurch charakterisiert, daß keinerlei Substitutionsvorgänge stattfinden. Es muß also möglich sein, den störungsfreien Wachstumsprozeß nicht nur mit Hilfe der konstanten Kapitalproduktivität sondern auch durch eine invariante Kapitalintensität zu kennzeichnen. Stimmen nämlich im Gleichgewicht w_Y , w_K und w_L überein, so muß in dieser Situation auch die Kapitalintensität k konstant sein. Der Anpassungsprozeß zum Gleichgewicht muß also nicht nur durch die kompensierende Bewegung der Kapitalproduktivität, sondern auch durch die Veränderung der Kapitalintensität zu beschreiben sein. Definiert man die Kapitalintensität k als

$$(36) \quad \frac{K}{L} = k,$$

so folgt für den Kapitalstock K :

$$(37) \quad K = kL.$$

Aus Vereinfachungsgründen ist die Kennzeichnung der zeitlichen Abhängigkeit von k durch Zeitindizes weggelassen worden. Die Ableitungen nach t werden im folgenden durch einen Punkt über der Variablen verdeutlicht. Die Veränderung des Kapitalstocks in der Zeit ergibt sich durch Differentiation von (37) nach t :

$$(38) \quad \dot{K} = \dot{k}L + L\dot{k} \quad ^2)$$

Da die Veränderung des Kapitalstocks dem Produkt aus Sparquote und Einkommen im Zeitpunkt t gleich sein muß, folgt unter Verwendung von (1) $Y=F(K,L)$:

$$(39) \quad sY = sF(K,L) = \dot{K}.$$

1) Phelps, E.S., The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen, in: The American Economic Review, Vol. 51, 1961, S. 638 ff.

2) Oppenländer, K., Die moderne Wachstumstheorie, Berlin und München 1963, S. 170.

Werden (38) und (39) durch L dividiert und die rechten Seiten der Ergebnisse gleichgesetzt, so ergibt sich daraus eine Differentialgleichung, die allein die Kapitalintensität als veränderliche Grösse enthält¹⁾:

$$sf(k,1) = \dot{k} + kn$$

$$(40) \quad \dot{k} = sf(k,1) - kn.$$

Diese die Veränderung der Kapitalintensität bestimmende Formulierung kann leichter verstanden werden, wenn die Wachstumsrate der Kapitalintensität $\dot{k}/k$ durch totale Differentiation abgeleitet wird; nach der Quotientenregel folgt aus K/L für $\dot{k}$:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2}$$

$$(41) \quad \frac{\dot{k}}{k} = w_k - w_L.$$

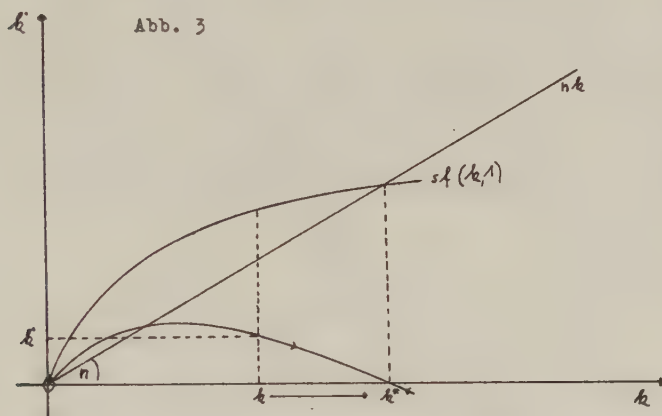
Da $w_L = n$ und $\bar{K} = sF(K,L)$, läßt sich (41) umwandeln zu

$$(42) \quad \dot{k} = k \frac{sF(K,L)}{K} - nk.$$

Wird in (42) die Funktion F durch L dividiert und $K/L = k$ berücksichtigt, dann stimmen (40) und (42) überein. Mit Hilfe des letzten, formal einfacheren Weges kann Gleichung (40) interpretiert werden. Die Funktion $f(k,1)$ stellt die Gesamtproduktfunktion dar, die sich aufgrund verschiedener Kapitaleinsätze in Verbindung mit einer eingesetzten Arbeitseinheit ergibt. Anders ausgedrückt, $f(k,1)$ charakterisiert die Abhängigkeit des Pro-Kopf-Einkommens von der Höhe der Kapitalintensität, wobei vereinfachend ein gleichbleibender Arbeitseinsatz von einer Einheit unterstellt sei. Der erste, positive Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (40) beschreibt also den Einfluß steigender Kapitalintensität infolge erhöhten Kapitaleinsatzes, der zweite, negative Ausdruck kennzeichnet den Einfluß steigenden Arbeitseinsatzes. Nur wenn beide Effekte sich gegenseitig kompensieren, wird die Kapitalintensität ihren

1) Solow, R.M., A Contribution to the Theory of Economic Growth, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, 1956, S. 69.

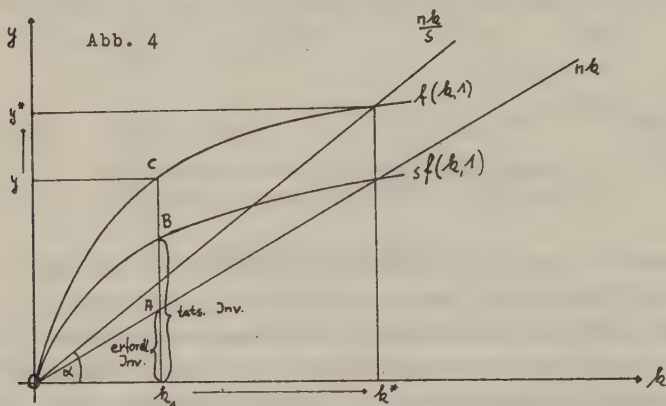
konstanten, gleichgewichtigen Wert erreicht haben, da dann nach (40) die Veränderung $\dot{k}$ gleich Null ist. Nur unter dieser Voraussetzung ist auch im beschriebenen Modell der Gleichgewichtspfad der Einkommensentwicklung verwirklicht. Die Stabilität des Gleichgewichts läßt sich an Hand von Abbildung 3 überprüfen, in welcher die Beziehungen der Gleichung (40) graphisch dargestellt werden.¹⁾



Auf der Abszisse ist die Kapitalintensität k abgetragen, auf der Ordinate ihre Veränderung $\dot{k}$. Die positive Wachstumsrate der Arbeit n läßt sich formal in Abbildung 3 als Strahl nk aufnehmen. Dieser Strahl muß durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufen, wobei die Steigung durch die Höhe der Wachstumsrate der Arbeit festgelegt ist. Die Funktion $f(k,1)$ gibt das mit zunehmender Kapitalintensität ansteigende Pro-Kopf-Einkommen an. Da die überproportionale Vermehrung des Faktors Kapital im Rahmen der linear-homogenen Funktion abnehmende Grenzerträge zur Folge hat, kann das Pro-Kopf-Einkommen mit steigender Kapitalintensität nur degressiv zunehmen. Diese $f(k,1)$ -Funktion mit der konstanten Sparquote multipliziert bewirkt eine Verschiebung der Kurve in Richtung Abszisse, ohne daß dadurch die Form der Kurve verändert wird. Wie nun Gleichung (40) nachweist, wird die Kapitalintensität zu- oder abnehmen, je nachdem ob $sf(k,1)$ größer oder kleiner als nk ist. Diese Veränderungen der Kapitalintensität sind das Zeichen

1) Solow, R.M., A Contribution...a.a.O., S. 70.

der systemimmanenten Stabilität, denn ist die tatsächliche Kapitalintensität k kleiner als die gleichgewichtige k^* , dann übertrifft der positive Kapitalakkumulationseffekt den negativen Arbeitswachstumseffekt und die tatsächliche Kapitalintensität k nähert sich dem Gleichgewichtswert k^* . Für die Situation $k > k^*$ gelten die umgekehrten Folgerungen. Dieser erstmals von Solow vorgenommene Stabilitätsbeweis läßt sich auch zur Demonstration des Gleichgewichts im Wachstumsprozeß verwenden. Wird dazu in Abbildung 3 neben der Funktion der Pro-Kopf-Ersparnisse auch die Funktion des Pro-Kopf-Einkommens abgetragen, so resultiert hieraus die in Abbildung 4 verzeichnete $f(k,1)$ -Kurve¹⁾. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, auf der Ordinate die bei unterschiedlichen Kapitalintensitäten anfal-



lenden Pro-Kopf-Einkommen $Y/L = y$ abzulesen. Der degressive Verlauf der Funktion ist nur das äußere Erscheinungsbild der abnehmenden partiellen Grenzerträge. Die $sf(k,1)$ -Funktion beschreibt wie in Abbildung 3 die aus dem Pro-Kopf-Einkommen gemäß der Sparquote s abgezweigten Einkommensanteile pro Kopf, die der Kapitalbildung zugeführt werden. Der Strahl nk läßt sich in diesem auf das gleichgewichtige Wachstum abgestellten Zusammenhang als jene Funktion definieren, die die Höhe jener Investitionen angibt, die notwendig ist, die mit der Rate n wachsende Arbeitsbevölkerung mit Kapital derart auszustatten, daß die bestehende Kapitalintensität erhalten bleibt²⁾. Da nach Abbildung 3 hierfür

1) Johnson, H.G., The Neo-Classical One-Sector-Growth-Model: A Geometrical Exposition and Extension to a Monetary Economy, in: *Economica*, Vol. N.S. 33, 1966 S. 265 f.

2) derselbe, S. 266.

nur ein einziger Wert k möglich ist, kann der dadurch bestimmte Gleichgewichtspfad nur mit einem einzigen Wert des Pro-Kopf-Einkommens korrespondieren. Dieses gleichgewichtige Pro-Kopf-Einkommen y^* muß während des Entwicklungsprozesses konstant bleiben. Jeder andere Wert von y ist dagegen nur kurzfristig aufrechtzuerhalten. Angenommen im Betrachtungszeitpunkt t hat y eine Höhe von $k_1 C = y_1$. Bei vorgegebener Produktionsfunktion wird dieses Einkommen mit Hilfe einer Kapitalintensität k_1 erstellt. Entsprechend der Sparquote s werden aus diesem Einkommen y_1 Bk_1 - Einkommensanteile pro Kopf gespart und dem Kapitalstock in Form von Investitionen zugeführt. Die erforderliche Investition zur Aufrechterhaltung von k_1 beträgt jedoch nur $k_1 A$ Einheiten des Pro-Kopf-Einkommens. Da der tatsächliche Zuwachs zum Kapital in dieser Situation der erforderlichen Zuwachs übertrifft, muß die Kapitalintensität ansteigen. Das hat eine Erhöhung des Pro-Kopf-Einkommens zur Folge, die jedoch, gemessen an der Zunahme der Kapitalintensität, nur unterproportional ist. Da somit auch der Zuwachs zum Kapitalstock in immer kleineren Raten vonstattengeht, nähert sich die Ersparnis pro Kopf der konstanten Wachstumsrate des Einkommens an. Der Prozeß findet sein Ende, wenn die gleichgewichtige Kapitalintensität k^* erreicht ist. Hier herrscht ein stabiles Gleichgewicht, da die bei vorgegebenem Bevölkerungswachstum notwendige Investition mit der durch die Sparquote bestimmten identisch ist.

Ist die gleichgewichtige Kapitalintensität verwirklicht, dann muß auch Bedingung (33) erfüllt sein, d.h. die Kapitalproduktivität muß ihrem Gleichgewichtswert - gebildet aus dem Quotienten von n und s - entsprechen. Daß die Kapitalproduktivität nur bei k^* konstant sein kann, wird aus Abbildung 4 ersichtlich, wenn die nk -Linie durch s dividiert wird. Die neue Gerade $\frac{n}{s}k$ hat eine Steigung von $\frac{n}{s}$, die bei $s < 1$ größer ist als n . Diese Steigung, gemessen durch den Winkel $\text{tg} \alpha$, ist gleich y^*/k^* , d.h. gleich der Kapitalproduktivität Y/K . Nur bei einer Kapitalintensität von k^* hat folglich auch die Kapitalproduktivität ihren Gleichgewichtswert n/s erreicht. Da die Kapitalproduktivität bzw. deren Veränderung ein deutliches Kriterium der Stabilität und Störungsfreiheit des Wachstumsprozesses darstellt, kann sie auch zur Bestimmung der Anpassungszeit zwischen zwei Gleichgewichtszuständen herangezogen werden. Die

zeitliche Dauer gibt Aufschluß, inwieweit der Stabilität des Systems tatsächlich eine wirtschaftspolitische Bedeutung beizumessen ist. Wird ein Großteil der Störung, wie beispielsweise beim Multiplikator-Theorem, in wenigen Perioden beseitigt, so ist die Bedeutungslosigkeit der Kapitalbildung für die Wachstumsrate gewiß. Erstreckt sich dagegen der Anpassungsprozeß über eine längere Zeitdauer, so ist eine Manipulation der Wachstumsrate mit Hilfe einer die Sparquote erhöhenden Wirtschaftspolitik durchaus angebracht. Wie nun die Stabilitätsanalyse mittels Zeitpfaden nachwies, wird eine vollständige Anpassung mit $t \rightarrow \infty$ zu verwirklichen sein. Die tatsächliche Dauer läßt sich damit nur an einer unvollständigen Anpassung der Kapitalproduktivität, beispielsweise von 90%, feststellen.

2.1.4. Die Dauer des Anpassungsprozesses.

Angenommen, innerhalb einer Volkswirtschaft sei im Rahmen der Modellprämissen ein Endstadium mit störungsfreier Entwicklung des Volkseinkommens verwirklicht. Der in diesem Fall vorhandene Kapitalstock habe eine Höhe von 400 Einheiten, der Arbeitsbestand eine Höhe von 100 Einheiten erreicht. Sind die Produktionselastizitäten gleich, d.h. $\alpha = \beta = 1/2$, so resultiert aus den Faktoreinsätzen ein Einkommen von 200 Einheiten. Beträgt die exogen bestimmte Wachstumsrate der Arbeit $n=5\%$, so bleibt die Wirtschaft im Gleichgewicht, wenn auch der Kapitalstock sich in der Zeit um 5% erhöht. Der Zuwachs zum Kapitalstock wird durch die Einkommenshöhe und die Sparquote determiniert. Eine gleichgewichtige Entwicklung kann bei vorliegender Konstellation folglich nur durch eine Sparquote von $s=\frac{1}{2}$ gewährleistet werden. In dieser Situation erhöht sich also auch das Einkommen um 5%; die gleichgewichtige Kapitalproduktivität hat einen Wert von $\frac{Y}{K} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$.

Eine von dieser Situation ausgehende Entwicklung wird in Tabelle 1 für die Perioden t_0 bis t_{90} beschrieben. Bei Konstanz aller Parameter erhöhen sich Faktoreinsätze und Einkommen kontinuierlich um 5%, in jeder einzelnen Periode behält die Kapitalproduktivität ihre gleichgewichtige Höhe von $1/2$ bei. Die endogen bestimmte Wachstumsrate des Kapitals unterliegt deshalb keiner Veränderung und bewirkt eine Erhöhung des Kapitalstocks nach 90 Perioden auf

36006 Einheiten. In Verbindung mit den auf 9002 angewachsenen Arbeitseinheiten steigt somit das Einkommen auf 18003 Einheiten. Auch nach 90 Perioden behält damit die Kapitalproduktivität ihren Gleichgewichtswert von $Y/K=1/2$ bei.

Tabelle 1

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_{10}	t_{20}	t_{50}	t_{90}
L	100	105	110,5	116,1	122,1	128,5	164,8	272	1218	9002
K	400	420	442,0	464,4	488,4	513,6	659	1087	4873	36006
Y	200	210	221,0	232,2	244,2	256,8	330	544	2437	18003
ΔL	-	5	5,5	5,6	6	6,5	8	13	58	429
ΔK	-	20	22	22,4	24	25,2	32	67	233	1710
ΔY	-	10	11	11,2	12	12,6	16	27	122	850
n	5% = konstant									
w_K	5% = Konstant									
w_Y	5% = konstant									
$\frac{Y}{K}$	0,5 = konstant									

Eine Störung dieser gleichgewichtigen Entwicklung ist beispielsweise durch eine autonome Erhöhung der Sparquote möglich. Die Wachstumsrate des Kapitals wird im Augenblick der Störung proportional zur s-Erhöhung ansteigen. Der dadurch zu 'hohe' Kapitaleinsatz muß die Konstanz der Wachstumsrate des Einkommens stören.

Angenommen, die Sparquote steige um 100% von $1/10$ auf $1/5$. Im selben Augenblick wird sich auch die Wachstumsrate des Kapitals von 5% auf 10% erhöhen. Der jetzt weiter ablaufende Wachstumsprozeß spiegelt sich in Tabelle 2 wider. Unter Berücksichtigung des weiterhin um 5% ansteigenden Arbeitseinsatzes muß infolge des überproportionalen Kapitaleinsatzes eine Zunahme des Einkommens von mehr als 5% erfolgen. Die neue Sparquote von $1/5$ führt in t_1 aus dem Einkommen der Periode t_0 von 200 Einheiten 40 Einheiten dem Kapitalstock zu, während der Arbeitseinsatz analog zur gleichgewichtigen Situation in Tabelle 1 weiterhin auf 105 Einheiten ansteigt. Entsprechend der zugrundegelegten Produktionsfunktion folgt hieraus ein Einkommen von 215 Einhei-

ten, d.h. w_Y ist in t_1 kurzfristig auf 7,5% angestiegen. Die ungleichgewichtige Situation wird durch $w_Y \neq w_K$ beschrieben. Der doppelt so hohe Zuwachs zum Kapitalstock hat das Einkommen ebenfalls mit einer höheren Rate als in der Vergangenheit anwachsen lassen, wobei jedoch der Zuwachs zum Einkommen wegen der sinkenden Grenzerträge des Kapitals geringer ist als der Zuwachs zum Kapitalstock. Wie bereits beschrieben, bilden diese abnehmenden Grenzerträge die Ursache der erneuten Annäherung der Wachstumsraten von Kapital und Einkommen an die der Arbeit. Die Divergenzen von w_Y und w_K rufen eine Abnahme der Kapitalproduktivität hervor, die in Verbindung mit der höheren, aber konstanten Sparquote ein weiteres Absinken der Wachstumsrate des Kapitals bewirken. Wie Tabelle 2 deutlich macht, geht Y/K von 0,49 in t_1

Tabelle 2

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_{10}	t_{20}	t_{50}	t_{90}
L	100	105	110,5	116,1	122,1	128,5	165	272	1218	9002
K	400	440	483	529	579	631	985	2105	14290	133066
Y	200	215	231	248	266	285	402	755	4170	34500
ΔL	-	5	5,5	5,6	6	6,5	8	13	58	429
ΔK	-	40	43	46	50	52	75	143	780	6666
ΔY	-	15	16	17	18	19	25	43	210	1650
n	5%	= konstant								
w_K	10%	9,78%	9,58%	9,35%	9,18%	8,3%	7,23%	5,78%	5,025%	
w_Y	7,5%	7,45%	7,39%	7,25%	7,16%	6,7%	6,2%	5,31%	5,288%	
$\frac{Y}{K}$	0,5	0,49	0,479	0,468	0,459	0,4505	0,409	0,359	0,292	0,2639

auf 0,2639 in t_{90} zurück. Eine vollständige Anpassung wird jedoch erst dann erreicht sein, wenn die Kapitalproduktivität ihren neuen Gleichgewichtswert von $1/4$ angenommen hat. Wie die Stabilitätsanalyse in 2.1.3. offenbart wird die damit verbundene vollständige Angleichung der Wachstumsrate erst in einem gegen Unendlich gehenden Zeitablauf zustandekommen. Zur Beurteilung der Anpassungsdauer genügen praktisch aber größere Werte, d.h. die Entwicklung kann als abgeschlossen gelten, wenn 90% von $1/4$ erreicht sind. Bevor nun mit Hilfe der Kapitalproduktivität eine exakte Bestim-

mung der Anpassungsdauer und der darauf einflußnehmenden Variablen durchgeführt wird, sei kurz auf die Wirkung der Sparquotenänderung verwiesen. Durch eine gesteigerte Spartätigkeit kann zwar letztlich keine Erhöhung der gleichgewichtigen Wachstumsrate hervorgerufen werden - das brachte bereits die Stabilitätsanalyse zum Ausdruck -, aber das absolute Einkommensniveau verschoben werden. Letzteres zeigt ein Vergleich der Tabellen 1 und 2, denn die höhere Sparquote von $1/5$ ermöglicht ein Einkommen von 34500 Einheiten gegenüber 18003 Einheiten im Fall gleichgewichtiger Entwicklung.

Während des Anpassungsprozesses nimmt die Kapitalproduktivität degressiv ab, wie durch einen Vergleich von Y/K verschiedener Perioden deutlich wird. Diese degressive Verminderung kann zur Bestimmung der Anpassungszeit als Kriterium herangezogen werden. Definiert man die Kapitalproduktivität im Zeitpunkt t als $Y_t/K_t = h_t$, so läßt sich die Wachstumsrate des Einkommens durch die Ableitung von $Y_t = h_t K_t$ nach t und ins Verhältnis gesetzt zur ursprünglichen Funktion Y_t ermitteln¹⁾:

$$(43) \quad \frac{\dot{Y}}{Y_t} = \frac{\dot{h} K_t}{Y_t} + \frac{\dot{K} \cdot h_t}{Y_t}$$

Die Wachstumsrate des Einkommens nach Gleichung (12) unter Berücksichtigung von $w_K = sh$ muß gleichzeitig auch durch

$$(44) \quad \frac{\dot{Y}}{Y_t} = \beta n + \alpha s h_t$$

auszudrücken sein. Die beiden rechten Seiten von (43) und (44) lassen sich gleichsetzen und zu einer die Veränderung der Kapitalproduktivität determinierenden Gleichung umformulieren:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{h} K_t}{Y_t} + \frac{\dot{K} h_t}{Y_t} &= \beta n + \alpha s h_t \\ \dot{h} \cdot \frac{1}{h_t} + s \frac{\dot{K} h_t}{Y_t} &= \beta n + \alpha s h_t \\ \dot{h} \cdot \frac{1}{h_t} + s h_t &= \beta n + \alpha s h_t \\ \dot{h} &= h_t (\beta n + \alpha s h_t - s h_t) \end{aligned}$$

Da sich die Produktionselastizitäten zu Eins ergänzen, ergibt sich

1) Sato, R., Fiscal Policy in a Neo-Classical Growth Model: An Analysis of Time Required for Equilibrating Adjustment, in: The Review of Economic Studies, Vol. 30, 1963, S. 18.

als weitere Vereinfachung:

$$(45) \quad \dot{h} = h_t / \beta (n - sh_t) \quad 1).$$

Die formale Ähnlichkeit der Ausdrücke (45) und (40) bestätigt nur die verbal schon aufgezeigten Einflüsse auf die Kapitalproduktivität: eine Erhöhung der Wachstumsrate der Arbeit äußert sich in einer positiven Veränderung der Kapitalproduktivität ($\dot{h} > 0$), während eine Steigerung der Wachstumsrate des Kapitals wegen der abnehmenden Grenzerträge die Kapitalproduktivität zurückgehen läßt ($\dot{h} < 0$). Das Ausmaß der jeweiligen Veränderung wird durch die in diesen Zeitpunkt bestehende Kapitalproduktivität und die Produktionselastizität der Arbeit festgelegt. Im Gleichgewichtsfall sind n und sh identisch, so daß auch $\dot{h}$ auf einem konstanten Wert verharret ($\dot{h} = 0$). Nimmt nun die Sparquote s zu, so muß wegen $\dot{h} < 0$ auch h abnehmen. Nach einer (theoretisch unendlich langen) Anpassungszeit wird wegen des in der Klammer gesunkenen h auch $\dot{h}$ wieder gleich Null sein. Die höhere Sparquote ist dann durch die verminderte Kapitalproduktivität genau kompensiert worden. Zur Zeitbestimmung muß Gleichung (45) in die Form einer linearen Differentialgleichung überführt werden, was ebenso wie bei Gleichung (20) mit Hilfe der Integration nach der Methode der Trennung der Variablen möglich ist:

$$\begin{aligned} (46) \quad & \int \frac{dh}{h_t(n-sh_t)} = \int \beta dt \\ & \frac{1}{n} \left[\int \frac{dh}{h_t} + s \int \frac{dh}{n-sh_t} \right] = \beta t + C \\ & \frac{1}{n} \left[\ln h_t - \ln(n-sh_t) \right] = \beta t + C' \\ & \ln \frac{h_t}{n-sh_t} = n\beta t + C', \quad \text{da } e^{C'} = A; \\ & \frac{h_t}{n-sh_t} = A \cdot e^{n\beta t} \\ & h_t = \frac{n}{s + A^{-1} e^{-n\beta t}}, \quad \text{da } A^{-1} = B; \\ (47) \quad & h_t = \frac{n}{s + B e^{-n\beta t}} \quad 2). \end{aligned}$$

1) Sato, R., Fiscal Policy...a.a.O., S. 16.

2) derselbe, S. 19.

Gleichung (47) beschreibt den Zeitpfad der (ungleichgewichtigen) Entwicklung der Kapitalproduktivität. Eine vollständige Anpassung von h an den Gleichgewichtswert kann - wie schon mehrmals betont - nur mit $t \rightarrow \infty$ erreicht werden, denn dann ist h wiederum allein durch den Quotienten aus n und s determiniert. Während aller endlichen Zeiträume ist nach (47) der Faktor $B e^{-n/\Delta t}$ von Einfluß, der die Senkung der Kapitalproduktivität impliziert. Die Gleichung (47) erfüllt den Tatbestand der kontinuierlichen Abnahme der Kapitalproduktivität während des Anpassungsprozesses, da die Einflufnahme von $B e^{-n/\Delta t}$ mit wachsendem t an Bedeutung verliert. Da jedoch dann die Anpassung in den ersten Perioden stärker ist, muß offensichtlich die Anpassungsdauer im Zeitablauf überproportional zunehmen.

Bezeichnet man mit h_0^* und h_1^* die den Sparquoten s_0 und s_1 zugehörigen gleichgewichtigen Kapitalproduktivitäten, so gilt analog zu (33):

$$(48) \quad h_0^* = \frac{n}{s_0} \quad ; \quad h_1^* = \frac{n}{s_1} .$$

Im Zeitpunkt $t=0$ folgt aus (47), daß h_0 gleich $n/s_1 + B$ ist, da $e^{-0}=1$. Hat sich in diesem Zeitpunkt die Sparquote von s_0 auf s_1 erhöht, so muß B genau der Differenz von $s_0 - s_1$ entsprechen, denn die Zunahme von s wirkt sich erst in der folgenden Periode von $t=1$ in einer Veränderung der alten (gleichgewichtigen) Kapitalproduktivität h_0^* aus. Die Differenz $s_0 - s_1 = B$ bestätigt so nur, daß der Zeitpfad der Kapitalproduktivität während des Anpassungsprozesses mit dem ursprünglich gleichgewichtigen Wert von h_0^* beginnt ($h_0^* = h_0$). In $t=0$ ist die tatsächliche Kapitalproduktivität noch von der gleichen Höhe wie die ehemals gleichgewichtige, wenn auch nur für einen infinitesimal kurzen Augenblick. Formal werden diese Zusammenhänge deutlich, wenn die Differenz $s_0 - s_1$ für B eingesetzt wird. Es ergibt sich wiederum Ausdruck (46) mit h_0^* . Mit Hilfe dieser Überlegung läßt sich der Zeitpfad von h_t umformulieren:

$$(49) \quad h_t = \frac{n}{s_1 + (s_0 - s_1)e^{-n/\Delta t}}$$

Bezeichnet man den Annäherungsbetrag von h_0^* an h_1^* als h^* , so muß dieser durch die Differenz zwischen den gleichgewichtigen Kapital-

produktivitäten ($h_0^* - h_1^*$) bestimmt sein. Im obigen Zahlenbeispiel entspricht h^* genau dem Wert $1/4$, da $1/2 - 1/4 = 1/4$.

$$(50) \quad \Delta h^* = h_0^* - h_1^* = \frac{\eta}{s_1} - \frac{\eta}{s_2} = \frac{\eta(s_2 - s_1)}{s_1 s_2}.$$

Angenommen, in der Zeit $t = t_c$ habe die Kapitalproduktivität c -Prozent der vollständigen Anpassung erreicht. Der absolute Betrag der Anpassung nach t_c Perioden läßt sich dann als $\Delta h^* \cdot c$ ausdrücken. Die tatsächliche Kapitalproduktivität in t_c sei h_c . Für h_c folgt damit aus (50):

$$(51) \quad h_c = h_0^* - \Delta h^* \cdot c = \frac{\eta}{s_0} - c \frac{\eta(s_2 - s_1)}{s_1 s_2} = \frac{\eta[s_1 - c(s_2 - s_1)]}{s_1 s_2}.$$

Aus der Gleichung des Zeitpfades der Kapitalproduktivität (49) bestimmt sich h für $t = t_c$ als

$$(52) \quad h_c = \frac{\eta}{s_1 + (s_0 - s_1)e^{-\eta\beta t_c}}.$$

Werden die rechten Seiten von (51) und (52) gleichgesetzt, so läßt sich eine Bestimmungsgleichung für t_c aufstellen:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{s_1 + (s_0 - s_1)e^{-\eta\beta t_c}} &= \frac{\eta[s_1 - c(s_2 - s_1)]}{s_1 s_2} \\ e^{-\eta\beta t_c} &= \frac{s_1 s_2}{(s_1 - c s_2 + c s_0)(s_2 - s_1)} \cdot \frac{s_2}{s_1 - s_2} \\ e^{-\eta\beta t_c} &= \frac{s_1 s_2 - s_1 s_2 + c s_1 s_2 - c s_0 s_2}{(s_1 - c s_2 + c s_0)(s_2 - s_1)} \\ e^{-\eta\beta t_c} &= \frac{(s_1 - c s_2)(s_0 - s_2)}{(s_1 - c s_2 + c s_0)(s_2 - s_1)} \\ e^{\eta\beta t_c} &= 1 + \frac{c s_0}{s_1 - c s_2} = 1 + \frac{c s_0}{s_1(1-c)} \\ (53) \quad t_c &= \frac{1}{\eta\beta} \ln \left[1 + \frac{c s_0}{s_1(1-c)} \right]. \end{aligned}$$

Gleichung (53) ermöglicht es, die Dauer einer beliebigen Anpassung der Kapitalproduktivität an ihren Gleichgewichtswert zu berechnen. Für eine vollständige Anpassung ($c=100\%$) folgt aus (53) wiederum das bekannte Ergebnis, daß hierzu unendlich viele Perioden vergangen sein müssen. Für geringere Prozentsätze lassen sich

dagegen endliche Werte für t_c nachweisen, wobei den Parametern n, β, s_0 und s_1 eine entscheidende Bedeutung zukommt. Die exakte Bestimmung des Einflusses jeder einzelnen t_c determinierenden Größe verlangt die partielle Ableitung $\partial t_c / \partial n$ usw. Aber auch ohne diese komplizierten mathematischen Schritte ist aus (53) ersichtlich, daß t_c für positive Werte aller Parameter eine monoton steigende Funktion von s_0 und c ist, dagegen mit positiven Werten von s_1, β und n eine monoton fallende Funktion darstellt¹⁾.

Der Anpassungsprozeß wird folglich um so schneller vonstatten gehen,

- a) je kleiner die ursprüngliche Sparquote ist,
- b) je höher die neue Sparquote ist,
- c) je stärker das Arbeitspotential wächst,
- d) je größer die Produktionselastizität der Arbeit ist,
- e) je geringer der Prozentsatz der Anpassung ist.

Allein die Auswirkung eines höheren oder niedrigeren Prozentsatzes c ist nach dem bisher gesagten offensichtlich, während die Punkte a) bis d) einer genaueren ökonomischen Interpretation bedürfen. Zu beachten ist, daß die verkürzende Wirkung aller Parameter nur für eine unvollständige Anpassung Geltung besitzt, da unabhängig von der Höhe der Werte s_0, s_1, n und β mit $c=100\%$ t immer gegen Unendlich gehen muß.

Die Dauer des Anpassungsprozesses ist wiederum entscheidend von dem quantitativen Effekt der abnehmenden Grenzerträge des überproportional eingesetzten Faktors abhängig. Wenn sich beispielsweise die Sparquote erhöht, dann übersteigt die Wachstumsrate des Kapitals die der Arbeit, so daß infolge der abnehmenden Grenzerträge des Kapitals der Zuwachs zum Einkommen immer geringer sein muß als der sich proportional zur Sparquotenerhöhung vollziehende Zuwachs zum Kapitalstock. Entscheidend für die Dauer der Anpassung ist nun die Situation - bestimmt durch die in Gleichung (53) enthaltenen Parameter -, in der die Störung eintritt. Herrscht zum Zeitpunkt der Sparquotenerhöhung eine hohe Wachstumsrate des Einkommens, so ist die Ausgangslage durch eine hohe Wachstumsrate der Arbeit n gekennzeichnet. Ist in diesem Zusammenhang s_0^* verhältnismäßig niedrig, so muß zur Erfüllung von Bedingung (14) $n = w_Y = w_K = s_0^* h_0^*$ die gleichgewichtige Kapitalproduktivität ebenfalls relativ hoch sein. Ein Mehreinsatz an Kapital in dieser Situation

1) Sato, R., Fiscal Policy...a.a.O., S. 21.

wird das Einkommen relativ stark ansteigen lassen, denn die verhältnismäßig hohe Kapitalproduktivität - und damit verhältnismäßig geringe Kapitalintensität - ist Ausdruck einer hohen Grenzproduktivität des Kapitals. In den Abbildungen 3 und 4 wird eine solche Situation durch die verhältnismäßig große Steigung der $f(k,1)$ -Kurve bei geringen Werten der Kapitalintensität symbolisiert. Die hohe Grenzproduktivität des Kapitals verursacht in der augenblicklich der Störung folgenden Periode eine nur kleine Senkung der Kapitalproduktivität, da der Zuwachs zum Einkommen nur um wenig geringer ist als der Zuwachs zum Kapitalstock. Ist die quantitative Wirkung der abnehmenden Grenzerträge so gesehen für eine Annäherung von h an h_1^* ungünstig, so wird die mit dem Rückgang von w_K verbundene Abnahme des Einkommenszuwachses relativ schnell einen c -prozentigen Wert von h_1^* erreichen lassen. Die hohe Grenzproduktivität des Kapitals vermindert selbst bei geringfügigem Rückgang von w_K die Wachstumsrate des Einkommens relativ stark, so daß die Kapitalproduktivität ebenfalls in den ersten Perioden in verhältnismäßig großem Maße abnimmt und bald der c -prozentige Wert von Y/K verwirklicht wird. Noch klarer werden die Zusammenhänge, wenn in der Ausgangssituation nur eine geringe (gleichgewichtige) Wachstumsrate des Einkommens - hervorgerufen durch ein niedriges Arbeitswachstum - besteht. Zur Aufrechterhaltung der Gleichgewichtsbedingung $n = w_Y = w_K = s_o^* h_o^*$ genügt jetzt selbst bei niedrigerer Sparquote als in der zuerst beschriebenen Situation eine geringere Kapitalproduktivität. Eine niedrige Kapitalproduktivität ist jedoch das äußere Zeichen einer verhältnismäßig hohen Kapitalintensität und damit geringer Grenzproduktivität. In den Abbildungen 3 und 4 besteht diese Konstellation auf einem weiter rechts liegenden Punkt auf der $f(k,1)$ -Funktion. Steigt jetzt infolge einer Erhöhung der Sparquote der Kapitaleinsatz an, dann nimmt das Einkommen nur stark unterproportional zu. Dazu sinkt zwar die Wachstumsrate des Kapitals stark ab, aber wegen der geringen Grenzproduktivität des Kapitals wirken sich jetzt die abnehmenden Grenzerträge auf den Anpassungsprozeß bremsend aus, denn mit dem relativ gesunkenen Kapitaleinsatz geht das Einkommen nur um wenig zurück. Die Kapitalproduktivität wird folglich nur langsam abnehmen. Eine niedrige anfängliche Sparquote und/oder eine hohe Wachstumsrate der Arbeit haben somit über ihren Einfluß auf die in der Ausgangssituation bestehende Kapitalproduktivität h_o^*

eine den Anpassungsprozeß verkürzende Wirkung. In diesem Zusammenhang wird auch der verkürzende Einfluß einer hohen Produktionselastizität der Arbeit klar. Ist β sehr hoch, dann muß aufgrund der linear-homogenen Funktion mit zwei Faktoren die Produktionselastizität des Kapitals sehr gering sein. Ein niedriger Wert für α impliziert einen verhältnismäßig geringen Kapitalkoeffizienten bzw. eine relativ hohe Kapitalproduktivität. Damit besteht wiederum eine Situation, wie sie in den Abbildungen 3 und 4 durch die relativ große Steigung der $f(k,1)$ -Kurve beschrieben wird. Die hohe Grenzproduktivität bewirkt dann einen ziemlich raschen Abbau der ungleichgewichtigen Kapitalproduktivität. Umgekehrt muß eine hohe Produktionselastizität des Kapitals eine geringe Grenzproduktivität implizieren, so daß dadurch der Anpassungsprozeß gebremst wird. Die Implikationen von α und β hinsichtlich der Anpassungsdauer werden im Zusammenhang mit technischem Fortschritt noch deutlicher, da dann die Wirkung der Produktionselastizität auf die Höhe der gleichgewichtigen Wachstumsrate explizit offengelegt wird. Die Einflußnahme einer hohen Sparquote s_1 auf die Anpassungsdauer benötigt keiner besonderen Erklärung, denn offensichtlich werden dadurch die bereits aufgezeigten Effekte nur unterstützt, da die absolute Höhe von s_1 nur für den bei Eintritt einer Störung auftretenden Zuwachs zum Kapitalstock verantwortlich ist. Je höher der überproportionale Kapitaleinsatz ist, um so mehr wird die hohe oder niedrige Grenzproduktivität des Kapitals an Bedeutung gewinnen.

Die bisherigen Ergebnisse lassen nun eine Überprüfung der Anpassungszeit für alternative Prozentsätze der Anpassung zu. Nur wenn die temporäre Erhöhung der Wachstumsraten des Einkommens und des Kapitals für höhere c -Werte von nicht allzu langer Dauer sind, kann die These der Unabhängigkeit der Wachstumsrate von der Höhe der Sparquote Gültigkeit besitzen.

Mit Hilfe von Gleichung (51) läßt sich die nach einer c -prozentigen Anpassung existierende Kapitalproduktivität berechnen¹⁾. Danach wird h_c durch die zwei verschiedenen Sparquoten, den Prozentsatz der Anpassung und durch die Wachstumsrate der Arbeit bestimmt. Für eine 20%-tige Anpassung der Kapitalproduktivität ergibt sich entsprechend der Werte des oben beschriebenen Zahlen-

1) Sato, R., The Harrod-Domar Model vs. the Neo-Classical Growth Model, in: The Economic Journal, Vol. 74, 1964, S. 363 f.

beispiels ($s_0^*=0,1$, $s_1^*=0,2$ und $n=5\%$) für h_c ein Wert von

$$h_c = \frac{0,05 [0,2 - 0,2(0,2-0,1)]}{0,2 \cdot 0,1} = 0,45$$

Bei vollständiger Angleichung der Kapitalproduktivität von 0,5=100% muß h_c mit $c=20\%$ eine Höhe von 0,45 angenommen haben. Da aber h sich mit immer kleineren Abnahmen in der Zeit entwickelt, d.h. sich nur asymptotisch dem Wert von 0,25 nähert, ist damit noch keine Aussage über t_c getroffen. Hierüber gibt die Gleichung (53) Auskunft:

$$t_c = \frac{\ln \left[1 + \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,2(1-0,2)} \right]}{0,5 - 0,05} \sim 4,8 \quad c=20\%$$

Bereits nach 4,8 Perioden hat sich die Kapitalproduktivität ihrem endgültigen Gleichgewichtswert um 20% genähert. Für größere Prozentsätze der Anpassung nimmt allerdings die zur Erreichung notwendige Zeit überproportional zu: für 30% auf $t_c=7,6$, für 40% auf $t_c=11,4$, für 50% auf $t_c=16,4$, für 60% auf $t_c=22,4$, für 70% auf $t_c=31,8$, für 80% auf $t_c=44,0$ und für 90% auf $t_c=70$. Diese Zahlenwerte verdeutlichen die asymptotische Anpassung, die für realistische Werte von s_0 , s_1 , n und α bzw. β bei einer 90%-tigen Anpassung - welche vielleicht als Quasi-Gleichgewicht verstanden werden kann - noch höhere t -Werte verlangt¹⁾.

Auf der Grundlage dieses einfachsten neoklassischen Wachstumsmodells verbleiben damit der Wirtschaftspolitik wegen der sehr langen Anpassungsdauer durchaus noch Möglichkeiten, über die Manipulation der Sparquote auf die Höhe der tatsächlichen Wachstumsrate Einfluß zu nehmen. Wesentlich geeigneter als Veränderungen der Spaquote scheinen allerdings Maßnahmen zu sein, die auf eine Erhöhung der Wachstumsrate der Arbeit hinwirken, da diese letztlich eine endgültige Steigerung der Wachstumsrate des Einkommens zur Folge haben.

Es verbleibt aber die Aufgabe, an Hand von realitätsnäheren Grundmodellen festzustellen, ob durch Berücksichtigung weiterer die Wachstumsrate beeinflussender Faktoren - wie z. B. durch Einbau gewisser Annahmen über die Abnutzung des eingesetzten Kapitals²⁾ - günstigere Ergebnisse erzielt werden können. Auf einige den An-

1) Sato, R., The Harrod-Domar Model...a.a.O., S. 383.

2) Conlisk, J., Unemployment in a Neoclassical Growth Model: The Effect on Speed of Adjustment, in: The Economic Journal, Vol. 76, 1966, S. 550 ff.

passungsprozeß beeinflussende Faktoren wird in modifizierten Ansätzen noch einzugehen sein.

2.1.5. Die Entwicklung des Pro-Kopf-Einkommens und zusammenfassende Ergebnisse.

Abschließend sei noch einmal kurz auf die Entwicklung des Einkommens bezogen auf eine Arbeits- bzw. Kapitaleinheit eingegangen.

Die Höhe des Pro-Kopf-Einkommens beträgt entsprechend der Produktionsfunktion (5) (unter Fortfall der Zeitindizes):

$$(54) \quad \frac{Y}{L} = L^{\beta-1} \cdot K^{\alpha}$$

Die Veränderung dieses Pro-Kopf-Einkommens in der Zeit ist wiederum durch die Ableitung nach t festzustellen, wobei diese mit Hilfe eines Punktes über der Variablen kenntlich gemacht sei:

$$(55) \quad \left(\frac{Y}{L}\right)^{\cdot} = (\beta-1) \cdot L^{\beta-2} \cdot K^{\alpha} \cdot \dot{L} + L^{\beta-1} \alpha K^{\alpha-1} \cdot \dot{K}$$

Dividiert durch die Ursprungsgleichung (54) ergibt sich die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Einkommens als

$$(56) \quad \left(\frac{Y}{L}\right)^{\cdot} \cdot \frac{1}{\frac{Y}{L}} = (\beta-1) \cdot \frac{\dot{L}}{L} + \alpha \frac{\dot{K}}{K}$$

Führt man auf der linken Seite von (56) die Ableitung für $\left(\frac{Y}{K}\right)^{\cdot}$ nach der Quotientenregel aus, so läßt sich hierfür $w_Y - w_L$ einsetzen.

$$w_Y - w_L = (\beta-1) w_L + \alpha w_K$$

Da sich α und β zu Eins ergänzen, folgt endgültig für die Wachstumsrate des Einkommens pro Kopf:

$$(57) \quad w_Y - w_L = \alpha (w_K - w_L)$$

Auf dem Gleichgewichtspfad mit übereinstimmenden Wachstumsraten von Arbeit und Kapital folgt das in Abbildung 4 vorweggenommene Ergebnis: das Pro-Kopf-Einkommen muß in der Zeit konstant sein.

Jede ungleichgewichtige Situation, die durch eine Erhöhung der Sparquote hervorgerufen wird vermag das Pro-Kopf-Einkommen zu steigern. Diese Erhöhung wird in ihrem Ausmaß von der Höhe der Produktionselastizität des Kapitals und der absoluten Differenz zwischen den Wachstumsraten von Kapital und Arbeit bestimmt. Ursache ist die mit der Kapitalintensitätssteigerung einhergehende Zunahme der Grenzproduktivität der Arbeit, also des Lohnes.

Die Höhe des - auf dem Gleichgewichtspfad ebenfalls konstanten - Einkommens pro Kapitaleinheit (die Kapitalproduktivität) und die darauf Einfluß nehmenden Faktoren wurden bereits im Rahmen der Stabilitätsanalyse und der Untersuchung der Anpassungszeit klargelegt (vergl. Gleichung (45)).

Damit sind alle Eigenheiten des einfachsten neoklassischen Wachstumsmodells aufgezeigt worden. Für die weitere Untersuchung soll dieses Modell als Grundlage und Vergleichsmaßstab dienen, und es empfiehlt sich deshalb, die charakteristischen Ergebnisse zusammenfassend in Erinnerung zu rufen:

1. Ein gleichgewichtiger Wachstumsprozeß ist möglich.
 2. Dieses Gleichgewicht ist stabil und wird durch abnehmende Faktorgrenzerträge verursacht.
 3. Störungen durch Variation der Sparquote sind nur temporär. Die Sparquote ist damit für die Höhe der gleichgewichtigen Wachstumsrate unbedeutend.
 4. Die ungleichgewichtige Situation ist allerdings von sehr langer Dauer.
 5. Auf dem Gleichgewichtspfad entwickeln sich bei konstanter Einkommensverteilung und unveränderten Pro-Kopf-Einkommen Kapitalstock, Arbeitspotential und Volkseinkommen mit gleicher Rate.
 6. Die Höhe der Wachstumsrate ist allein durch das exogen bestimmte Arbeitswachstum determiniert, während die absolute Einkommenshöhe durch die Ausgangswerte von L, Y und s festgelegt ist.
- Diese Ergebnisse beruhen auf einer Reihe von teilweise restriktiven Annahmen. Ohne die Gültigkeit des Sayschen Theorems in die Kritik miteinzubeziehen, so muß aber auf die stillschweigende Annahme der unendlich langen physischen und ökonomischen Nutzbarkeit der Kapitalgüter, der beiderseitigen Verwendung des Gutes 'Einkommen' in der Konsum- und Produktionssphäre und der exogen determinierten Konstanz der Wachstumsrate der Arbeit verwiesen werden.

Die Auflösung dieser Annahmen läßt eine Reihe von Modifikationen dieses einfachsten neoklassischen Modells zu und führt zur Berücksichtigung der Abschreibung, zweier Sektoren und endogener Bevölkerungsentwicklung. Mit Ausnahme der Abschreibung, deren Verwendung in den noch zu behandelnden Vintage-Modellen besondere Bedeutung zukommt, wird im folgenden auf diese Modifikationen verzichtet werden.

Wesentlicher für das neoklassische Wachstumsmodell ist dagegen die zugrundegelegte Produktionsfunktion. Ihre Modifizierung wird den weiteren Verlauf der Arbeit bestimmen.

2.2. Gleichgewicht und Stabilität des Wachstumsprozesses unter der Annahme einer linear-homogenen Produktionsfunktion mit konstanter Substitutionselastizität von ungleich Eins.

Das in 2.1. beschriebene Grundmodell beruht auf dem Spezialfall der Cobb-Douglas Funktion, die wegen der Konstanz der Exponenten α und β eine Substitutionselastizität von Eins unterstellt. Das hat zur Folge, daß selbst in ungleichgewichtigen Situationen mit divergierenden Wachstumsraten die Einkommensverteilung stets unverändert bleibt, d.h., daß die einmal gewählten Produktionselastizitäten erhalten werden. Offensichtlich ist dadurch ein Teil möglicher Störungseffekte ausgeschlossen. Eine derartige Vereinfachung trägt jedoch den in der Realität vorhandenen Gegebenheiten nicht Rechnung. Vielmehr haben empirische Untersuchungen die Irrealität dieser Annahme nachgewiesen. Aufgrund dieses Ergebnisses ist es wirklichkeitnäher, der Substitutionselastizität von Arbeit und Kapital einen Wert von kleiner als Eins beizumessen¹⁾.

Es erhebt sich damit die Frage, inwieweit Gleichgewicht und Stabilität des Wachstumsprozesses auf der Grundlage einer Produktionsfunktion mit einer Substitutionselastizität ϵ ungleich Eins zu vereinbaren sind.

2.2.1. Die Substitutionselastizität von ungleich Eins.

Der Begriff der Substitutionselastizität versucht ganz allgemein die quantitativen Veränderungen des Faktoreinsatzverhältnisses aufgrund einer Veränderung der dieses Einsatzverhältnis bestimmenden Faktoren zu beschreiben. Unter den weiterhin gültigen Annahmen der Grenzproduktivitätstheorie läßt sich die Substitutionselastizität ϵ als jene Größe definieren, die angibt, um wieviel sich das Kapital-Arbeits-Einsatzverhältnis ändert, wenn das Grenzproduktivitätsverhältnis (bzw. das reale Faktorpreisverhältnis) sich verschoben hat:

$$(1) \quad \epsilon = - \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}} : \frac{d\left(\frac{\frac{\partial Y}{\partial K}}{\frac{\partial Y}{\partial L}}\right)}{\frac{\frac{\partial Y}{\partial K}}{\frac{\partial Y}{\partial L}}} = - \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}} : \frac{d\left(\frac{r}{\bar{c}}\right)}{\frac{r}{\bar{c}}}$$

Offensichtlich ist $\epsilon = 1$ nur ein Sonderfall von (1), denn danach

1) Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S., Solow, R.M., Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, in: The Review of Economics and Statistics, Vol.43, 1961, S. 246.

kann σ alle Werte zwischen Null und Unendlich durchlaufen. Die Substitutionselastizität charakterisiert gleichzeitig das Austauschverhältnis der Faktoren, denn $\sigma = 0$ beschreibt den Fall der von Harrod und Domar angenommenen Limitationalität der Faktoren und $\sigma = \infty$ den Fall homogener Produktionsfaktoren. Alle dazwischen liegende Werte kennzeichnen die Substitutionsmöglichkeiten von Kapital und Arbeit als gut ($\sigma > 1$) oder schlecht ($\sigma < 1$). Im folgenden sind wegen der Annahme substituierbarer Faktoren nur jene Fälle $\sigma \geq 1$ von Interesse. Im Gegensatz zur bisherigen Analyse wird sich jetzt ein Substitutionsprozeß unter erschwerten oder erleichterten Bedingungen vollziehen.

Als Prämisse bleibt weiterhin bestehen, daß σ unabhängig von seinem Wert konstant ist und daß die Produktionsfunktion linear-homogene Form besitzt. Diese Verbindung von Linear-Homogenität und Konstanz von σ hat den in der Literatur verwendeten Begriff der CES-Funktion (constant elasticity of substitution) geprägt¹⁾. Sie zeigt in vielen Fällen die Abhängigkeit des Produktionsergebnisses vom Faktoreinsatz besser als die nur einen Spezialfall darstellende Cobb-Douglas Funktion²⁾.

2.2.2. Die allgemeinen Auswirkungen einer Substitutionselastizität von ungleich Eins.

Die in (1) formulierte Definition von σ läßt sich durch Auflösung der Differentialquotienten in den für eine Wachstumsanalyse leichter zu handhabenden Ausdruck

$$(2) \quad \sigma = - \frac{w_K - w_L}{w_r - w_p}$$

umwandeln³⁾, wobei wie bisher w_r und w_l die Wachstumsraten von Zins und Lohn angeben. Nach Gleichung (2) kann die Substitutionselastizität als jene Größe verstanden werden, die das prozentuale Ansteigen der Kapitalintensität determiniert, welches notwendig ist, einen einprozentigen Rückgang des Faktorpreisverhältnis-

1) Arrow, K.J., u.a., Capital-Labor Substitution...a.a.O., S.

2) Scheper, W., Produktionsfunktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 177, 1965, S. 1.

3) Kendrick, J.W. and Sato, R., Factor Prices, Productivity, and Economic Growth, in: The American Economic Review, Vol. 53, 1963, S. 989.

ses hervorzurufen¹⁾. Ein Zahlenbeispiel mag das verdeutlichen: Angenommen, die Erhöhung des Kapitalstocks um 1% geht mit einer Verminderung des Arbeitseinsatzes um 2% einher. Diese Formulierung der Veränderung des Faktoreinsatzes in Prozentsätzen, ermöglicht es, ϵ nach (2) sowohl statisch, d.h. bei konstantem Produktionsergebnis, als auch dynamisch, d.h. für einen wachsenden Output zu benutzen. Die Zunahme des Kapitaleinsatzes vermindert wegen der weiterhin abnehmenden Grenzerträge die Grenzproduktivität des Kapitals, beispielsweise um $1/4\%$. Die Grenzproduktivität der Arbeit muß sich dagegen wegen des (in dynamischer Betrachtung relativ) geringeren Arbeitseinsatzes erhöhen, z.B. um $3/4\%$. Es findet damit aufgrund einer 1%-tigen Abnahme des Faktorpreisverhältnisses eine Substitution von Arbeit durch Kapital um 3% statt²⁾. Dieser Fall mit $\epsilon = 3$ charakterisiert die Faktoren als gute Substitute, denn der relativ starken Substitution von Arbeit durch Kapital steht nur eine verhältnismäßig geringe Änderung des Faktorpreisverhältnisses gegenüber. Die Grenzproduktivität des Kapitals (der Arbeit) ist nur wenig gesunken (gestiegen). In dieser Situation mit $\epsilon = 3$ ließe sich eine Produktionserhöhung durch steigenden Maschineneinsatz erreichen, ohne daß damit der Lohn ebenfalls stark in die Höhe gehen würde. Hätte dagegen die einprozentige Senkung des Faktorpreisverhältnisses nur zu einem geringen quantitativen Austausch von Arbeit durch Kapital - beispielsweise $0,5\%$ - geführt, so wäre die Abnahme der Grenzproduktivität des Kapitals im Verhältnis zum Mehreinsatz relativ hoch. Umgekehrt würde die kaum geringere Arbeitsmenge eine daran gemessene starke Lohnerhöhung bewirken. Eine Zunahme des Outputs durch Mehreinsatz an Kapital wäre nur durch steil ansteigende Löhne zu erkauften. Der letzte Fall kennzeichnet die Faktoren als schlechte Substitute.

Die Beispiele verdeutlichen, daß unter der Annahme von $\epsilon \neq 1$ ungleichgewichtige Situationen im Wachstumsprozeß sich auch in einer Veränderung der Einkommensverteilung und damit der Produktionselastizitäten niederschlagen müssen. Je nachdem, welcher Faktor überproportional eingesetzt wird ($w_K \neq w_L$), und je nachdem welche konstante Substitutionselastizität besteht, muß einer der Faktoren im Anpassungsprozeß derart benachteiligt werden, daß sein

1) Meade, J.E., A Neo-Classical Theory...a.a.O., S. 32.

2) derselbe, S. 37.

Einkommensanteil abnimmt. Der Veränderung der Verteilung und damit der Produktionselastizitäten sind allein durch die Annahme konstanter Skalenerträge Grenzen gesetzt.

2.2.3. Die Auswirkung der Substitutionselastizität auf den Wachstumspfad.

Wird durch einen Wert von $\phi \neq 1$ die Verteilung und damit die partielle Produktionselastizität der Faktoren geändert, so kann das nach Gleichung (12) aus 2.1.2. nicht ohne Auswirkung auf den Wachstumspfad bleiben.

Bisher blieb die Einkommensverteilung konstant, weil infolge einer Substitutionselastizität von Eins Veränderungen des Arbeits- bzw. Kapitalkoeffizienten durch umgekehrt proportionale Bewegung der Grenzproduktivitäten genau kompensiert wurden. Diese Kompensation wird durch die Annahme von $\phi \neq 1$ gestört. Denn ist beispielsweise $\phi > 1$, so sinkt zwar mit steigender Kapitalintensität infolge der Linear-Homogenität der Funktion die Grenzproduktivität des Kapitals weiterhin ab und der Kapitalkoeffizient nimmt noch zu, aber definitionsgemäß muß jetzt die Grenzproduktivität um weniger sinken als bei $\phi = 1$, so daß die Zunahme von K/Y nicht mehr voll kompensiert wird. Entscheidend ist für diesen Vorgang, daß α kleiner als Eins ist, was - wie in späterem Zusammenhang noch verdeutlicht wird - auch bei einer nicht-linearen Funktion der Fall sein kann. Ergänzen sich α und β zu Eins, so muß für die Produktionselastizität, d.h. den Einkommensanteil der Arbeit, die entgegengesetzte Bewegung entstehen. Da Kapital und Arbeit gute Substitute darstellen, erhöht sich bei Mehreinsatz von Kapital die Grenzproduktivität der Arbeit nur wenig, auf jeden Fall um weniger, als die Arbeitsproduktivität ansteigt. Das Produkt aus $\frac{\partial Y}{\partial L}$ und $\frac{L}{Y}$ sinkt, so daß sich die Produktionselastizität β vermindert. Für den Wachstumsprozeß zeichnet sich prima vista eine Tendenz ab, einem Endzustand mit $w_Y = \alpha w_K = w_K$ entgegenzustreben. Voraussetzung ist ein andauerndes Ungleichgewicht, bei dem die Wachstumsrate des Kapitals die der Arbeit übertrifft.

Sinkt dagegen die Kapitalintensität, d.h. $w_L > w_K$, und ist weiterhin die Substitutionselastizität größer als Eins, so muß die Produktionselastizität der Arbeit zunehmen. Wegen der abnehmenden

Grenzerträge der Arbeit steigt der Arbeitskoeffizient an, während - wegen der guten Substituierbarkeit - die Grenzproduktivität der Arbeit nur unterproportional sinkt; β wird mit sinkender Kapitalintensität sich dem Wert Eins nähern. Für α vollzieht sich der umgekehrte Prozeß in Richtung auf $\alpha = 0$. Unter dieser Konstellation ist ein Endstadium mit $w_Y = \beta w_L = w_L$ zu erwarten.

Unter der Voraussetzung, daß die Substitutionselastizität kleiner als Eins ist, müssen sich für die Veränderung der Produktionselastizitäten die entgegengesetzten Bewegungen ergeben. Steigt die Kapitalintensität an und sind Arbeit und Kapital schlechte Substitute, so verbindet sich mit der Erhöhung des Kapitalkoeffizienten ein starker Abfall der Grenzproduktivität des Kapitals, der überkompensierend wirkt. Die Produktionselastizität des Kapitals wird deshalb abnehmen, während die der Arbeit ansteigt, da die Abnahme von $\frac{L}{Y}$ wegen $\beta < 1$ mit einer starken Erhöhung der Grenzproduktivität der Arbeit einhergeht. Mit ständig wachsender Kapitalintensität ist jetzt ein Endzustand mit $w_Y = \beta w_L = w_L$ zu erwarten.

Sinkt dagegen die Kapitalintensität, da die Wachstumsrate der Arbeit die des Kapitals übertrifft, so wird bei schlechter Substituierbarkeit der Faktoren die Grenzproduktivität der Arbeit stärker sinken als der Arbeitskoeffizient wegen der abnehmenden Grenzerträge der Arbeit ansteigt. Vermutlich wird hier der Endzustand zu einer Konstellation $w_Y = \alpha w_K = w_K$ führen.

Es bestehen allerdings nur Tendenzen, die auf die Verwirklichung der beschriebenen Endzustände hinwirken. Ob tatsächlich eine der extremen Konstellationen realisiert wird, hängt davon ab, ob die Kapitalintensität im Zeitablauf ständig zu- oder abnimmt. Es besteht hinsichtlich der anfangs beschriebenen neoklassischen Modells der Verdacht, daß durch die endogene Behandlung der Wachstumsrate des Kapitals Gegenkräfte hervorgerufen werden, die eine Annäherung der Wachstumsraten von Arbeit und Kapital verursachen. Wird einmal die Identität von w_K und w_L herbeigeführt, dann ist allerdings ein störungsfreies Wachstum ohne Substitutionseffekt möglich.

Im folgenden sind deshalb die vier beschriebenen Fälle: a) $\beta < 1$; $w_K > w_L$, b) $\beta < 1$; $w_L > w_K$, c) $\beta > 1$; $w_K > w_L$ und d) $\beta > 1$; $w_L > w_K$ einer genaueren Analyse zu unterziehen.

Dazu bedarf es einer exakten mathematischen Formulierung der Produktionsfunktion.

2.2.4. Die CES-Funktion und ihre Eigenheiten.

Die Grundlage einer detaillierten Untersuchung des Wachstumsprozesses bildet die CES-Funktion, die erstmals von Arrow u. a.¹⁾ aufgestellt wurde:

$$(3) \quad Y = [\gamma K^{-\rho} + \mu L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

Neben den aus der Cobb-Douglas Funktion bekannten Symbolen stellen γ und μ die sog. Distributionsparameter dar, die für die funktionale Verteilung mitverantwortlich sind. Wegen der Annahme der vollständigen Konkurrenz in Verbindung mit der Linear-Homogenität der Funktion ergänzen sich diese Distributionsparameter zu Eins. Im Sonderfall von $\rho = 1$ sind sie allein für die Verteilung zuständig, denn dann sind sie - wie noch zu zeigen ist - mit den Produktionselastizitäten identisch. Nimmt dagegen die Substitutionselastizität einen Wert von ungleich Eins an, so bestimmt neben γ und μ auch das Faktoreinsatzverhältnis die Verteilung mit²⁾, wie bereits auch aus den einleitenden Bemerkungen deutlich wurde. Die Substitutionselastizität ρ selbst wird durch den sog. Substitutionsparameter σ in (3) aufgenommen, der durch die Beziehung

$$\sigma = \frac{1-\rho}{\rho}$$

mit ρ in Verbindung steht. Für ρ von Null bis Unendlich durchläuft der Substitutionsparameter die Werte von Unendlich bis minus Eins. Da die Untersuchung vorerst unter Ausschluß von technischem Fortschritt geführt wird, kann in (3) auf den von Arrow und seinen Mitarbeitern verwendeten Niveau- oder Effizienzparameter³⁾ verzichtet werden. Aus Gleichung (3) läßt sich für den Fall einer Substitutionselastizität von Eins die bisher gebräuchliche Cobb-Douglas Funktion ableiten, was unter Verwendung der l'Hospital'schen Regel geschieht. Aus Formulierung (3) ist deshalb die Ableitung mit Hilfe einer Grenzbetrachtung - auf die hier verzichtet

1) Arrow, K.J., u.a., Capital-Labor Substitution...a.a.O., S. 225f.

2) Scheper, W., Produktionsfunktionen...a.a.O., S. 5.

3) Arrow, K.J., u.a., Capital-Labor Substitution...a.a.O., S. 230.

werden kann - durchzuführen, die für (3) die Cobb-Douglas Funktion

$$(4) \quad Y = L^{\mu} \cdot K^{\gamma}$$

ergibt¹⁾. Gleichung (3) erfüllt ebenfalls die Bedingung der Linear-Homogenität, denn die Erhöhung der eingesetzten Faktoren K und L um einen Prozentsatz p läßt auch das Einkommen um diesen Prozentsatz ansteigen:

$$pY = [\gamma(pK)^{-\frac{1}{\sigma}} + \mu(pL)^{-\frac{1}{\sigma}}]^{-\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}} \\ pY = [p^{-\frac{1}{\sigma}}(\gamma K^{-\frac{1}{\sigma}} + \mu L^{-\frac{1}{\sigma}})]^{-\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}} = p[\gamma K^{-\frac{1}{\sigma}} + \mu L^{-\frac{1}{\sigma}}]^{-\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}}$$

Da entsprechend der Grenzproduktivitätstheorie die realen Faktorpreise weiterhin mit den Grenzproduktivitäten der Faktoren übereinstimmen müssen, ist es zweckmäßig aus (3) $\frac{\partial Y}{\partial L}$ und $\frac{\partial Y}{\partial K}$ zu ermitteln. Dazu muß die Produktionsfunktion partiell nach den Faktoren differenziert werden. Am Beispiel der Grenzproduktivität des Kapitals ergibt sich:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = -\frac{1}{\sigma} [\mu L^{-\frac{1}{\sigma}} + \gamma K^{-\frac{1}{\sigma}}]^{-\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}-1} \cdot -\gamma K^{-\frac{1}{\sigma}-1} \\ \frac{\partial Y}{\partial K} = \gamma [\mu L^{-\frac{1}{\sigma}} + \gamma K^{-\frac{1}{\sigma}}]^{-\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}(1+\sigma)} \cdot K^{-1+\sigma}$$

Für den Klammerausdruck läßt sich nach (3) wiederum das Einkommen Y einsetzen:

$$(5) \quad \frac{\partial Y}{\partial K} = \gamma \left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\sigma}$$

Analog bestimmt sich die Grenzproduktivität der Arbeit als

$$(6) \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = \mu \left(\frac{Y}{L}\right)^{1+\sigma}$$

Im Gegensatz zu den aus der Cobb-Douglas Funktion abgeleiteten Grenzproduktivitäten nach (7) und (8) aus 2.1.1. erscheint hier nach (5) und (6) explizit die Substitutionselastizität (in der

1) Der genaue analytische Beweis ist für das Verständnis der weiteren Untersuchung nicht erforderlich und ist in der Literatur verschiedentlich aufgeführt, z.B. von Helmstädter, E., Die Isoquanten gesamtwirtschaftlicher Produktionsfunktionen mit konstanter Substitutionselastizität, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 176, 1964, S. 193.
Scheper, W., Produktionsfunktionen...a.a.O., S. 3 f.

Form des Substitutionsparameters) als Determinante der Grenzproduktivität. Die oben erwähnte Identität von Distributionsparameter und Produktionselastizität ist für den Sonderfall von $\sigma = 1$, d.h. $\rho = 0$ offensichtlich.

Mit Hilfe von (5) und (6) ist es nun nicht schwierig, die Produktionselastizitäten bzw. Einkommensanteile α und β auf der Grundlage einer CES-Funktion zu entwickeln. Dazu ist es notwendig, die in der Definition von α und β nach (7) und (8) in 2.1.1. enthaltenen Grenzproduktivitäten durch die Ausdrücke (5) und (6) zu ersetzen:

$$\alpha = \gamma \left(\frac{Y}{K} \right)^{(1+\rho)} \cdot \frac{K}{Y} = \gamma \left(\frac{Y}{K} \right)^{(1+\rho)} \cdot \left(\frac{Y}{K} \right)^{-1}$$

$$(7) \quad \alpha = \gamma \left(\frac{Y}{K} \right)^{\rho}$$

Analog gilt für die Produktionselastizität der Arbeit:

$$(8) \quad \beta = \mu \left(\frac{Y}{L} \right)^{\rho}$$

Die Formulierungen (7) und (8) machen noch einmal deutlich, daß die Einkommensanteile nur für den Sonderfall einer Substitutionselastizität von Eins ($\rho = 0$) allein durch die Distributionsparameter determiniert werden. Für alle anderen Fälle von σ gleich Null bis Unendlich ist neben diesen Distributionsparametern auch das Einsatzverhältnis der Faktoren (die Kapitalintensität) und der die Substitutionsbeziehungen regelnde Parameter ρ von Bedeutung. Die Auswirkungen des Faktoreinsatzverhältnisses in Verbindung mit bestimmten Werten für σ , besser die Veränderung der Kapitalintensität und die darauf zurückzuführenden Variationen von α und β , wurden tendenziell beschrieben. Hieraus läßt sich die Vermutung gewinnen, daß der Wachstumsprozeß und insbesondere seine Stabilität entscheidend vom Wert der Substitutionselastizität mitbeeinflusst werden.

Der entscheidende Unterschied zwischen Cobb-Douglas- und CES-Funktion liegt in den Reaktionen auf eine Veränderung des Kapital-Arbeits-Einsatzverhältnisses. Nur bei $\sigma = 1$ wird die historisch übernommene Einkommensverteilung zementiert. Störungen eines gleichgewichtigen Wachstumsprozesses werden beseitigt, ohne daß sich dadurch die Einkommensanteile verschieben. Ein durch höheren

Kapitaleinsatz hervorgerufener höherer Kapitalkoeffizient erfährt durch eine proportional dazu gesunkene Verzinsung genaue Kompensation. Jeder Produktionsmethode, d.h. jeder möglichen Kapitalintensität entspricht eine ganz bestimmte Kapitalproduktivität, die sich invers zum Faktoreinsatzverhältnis entwickelt. Die unendlich hohe Kapitalintensität korrespondiert so mit einer Kapitalproduktivität von Null und umgekehrt.

Die Berücksichtigung einer guten oder schlechten Substitutionsbeziehung zwischen den Faktoren bringt hier eine Veränderung. Da die Verteilung nicht mehr von der Produktionsmethode unabhängig ist, kann z.B. die mit ansteigender Kapitalintensität sich zugunsten des Kapitals ändernde Verteilung ihren Endwert von $\alpha = 1$ erreichen, ohne daß hierdurch bei unendlich hoher Kapitalintensität die Kapitalproduktivität bereits auf Null abgesunken ist. Ein Zahlenbeispiel mag diesen Sachverhalt verdeutlichen: Angenommen, es bestehen die Werte $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $Y=100$ und $K=200$. Aus (7) läßt sich damit ein ungefährender Einkommensanteil des Kapitals von 0,7 berechnen. Steigt nun die Kapitalintensität derart an - ohne vorerst den konkreten Wert zu bestimmen -, daß die Kapitalproduktivität auf 0,25 absinkt, so erhöht sich der Einkommensanteil des Kapitals bei konstanten β und γ auf Eins. Das gesamte Volkseinkommen fällt dem Kapital zu. In einem Wachstumsprozeß wäre hier der Endzustand $w_Y = \alpha w_K = w_K$ erreicht, denn stimmen die Wachstumsraten von Einkommen und Kapital überein, treten bei konstanter Sparquote auch keine weiteren Störungen auf. Die Kapitalproduktivität verharrt auf ihrem Wert von 0,25. Dieser Wert determiniert die Untergrenze von Y/K und läßt sich in allgemeiner Form aus (7) für $\alpha = 1$ ableiten:

$$(9) \quad 1 = \gamma \left(\frac{Y}{K} \right)^{\beta} ; \quad \frac{Y}{K} = \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Umgekehrt besteht natürlich auch eine Obergrenze, bis zu der sich die Kapitalproduktivität entwickeln kann. Voraussetzung ist eine Verschiebung der Einkommensverteilung mit abnehmender Kapitalintensität bei $\beta > 1$ zugunsten der Arbeit. Das Ende eines solchen Prozesses ist spätestens bei jener Kapitalintensität (und damit auch der Kapitalproduktivität) erreicht, wenn $\beta = 1$ ist. Aus (7) läßt sich somit diese Obergrenze für $\alpha = 0$ ableiten. Scheidet man

den ökonomisch irrelevanten Fall mit $\gamma = 0$ aus, so kann mit $\delta > 1$, d.h. $\rho < 0$, α nur dann gleich Null sein, wenn die Kapitalproduktivität unendlich hoch ist. Ohne daß bisher die konkreten Werte für die Kapitalintensität festgelegt wurden (K/L kann alle Werte zwischen Null und Unendlich annehmen), bewirkt die Berücksichtigung von $\delta > 1$ eine Begrenzung der Kapitalproduktivität auf eine Werteskala von $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{\delta}}$ bis Unendlich. Die diesen Grenzwerten der Kapitalproduktivität zugehörigen Kapitalintensitäten ergeben sich aus der Produktionsfunktion (3), indem auf der rechten Seite der Faktor Kapital ausgeklammert wird:

$$Y = K [\gamma + \mu L^{-\delta} K^{\delta}]^{-\frac{1}{\delta}}$$

$$(10) \quad \frac{Y}{K} = \left[\gamma + \mu \left(\frac{K}{L} \right)^{\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}} \quad 1)$$

Hieraus folgt unter der Voraussetzung $\delta > 1$ der der Untergrenze der Kapitalproduktivität (9) entsprechende Wert der Kapitalintensität:

$$\left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{\delta}} = \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left[\mu \left(\frac{K}{L} \right)^{\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

$$0 = \left[\mu \left(\frac{K}{L} \right)^{\delta} \right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

$$(11) \quad 0 = \mu \left(\frac{K}{L} \right)^{\delta}$$

Gleichung (11) kann bei positivem, konstanten Wert des Distributionsparameters μ und $\delta > 1$, d.h. $\rho < 0$ nur erfüllt sein, wenn die Kapitalintensität unendlich hoch ist. Für die Obergrenze der Kapitalproduktivität muß dagegen die Kapitalintensität gleich Null sein.

Die Verwendung einer Substitutionselastizität von größer als Eins in Verbindung mit einer linear-homogenen Funktion setzt bei einer Entwicklung der Kapitalintensität von Null bis Unendlich der Kapitalproduktivität Grenzen zwischen Unendlich und einem positiven Wert $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{\delta}}$.

Ebenso wird auch für schlechte Substitutionsbeziehungen zwischen Arbeit und Kapital ($\delta < 1$) die Kapitalproduktivität eine Begrenzung erfahren. Das verdeutlicht wieder das oben verwendete Zahlen-

1) Pitchford, J.D., Growth and the Elasticity of Factor Substitution, in: The Economic Record, Vol.41, 1965, S. 494.

beispiel, abgewandelt für $\delta < 1$ mit den Werten: $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ und $Y/K = 0,25$. Die Produktionselastizität bzw. der Einkommensanteil des Kapitals beträgt somit 0,25. Sinkt die Kapitalproduktivität beispielsweise auf $1/9$, so fällt α auf 0,166. Das spiegelt die bereits beschriebene Entwicklung der Kapitalproduktivität bei $\delta < 1$ wider. Ist der Einkommensanteil des Kapitals gleich Null, so wird auch die Kapitalproduktivität gleich Null sein. Umgekehrt wird mit einer Verminderung der Kapitalintensität die Verteilung sich ständig zuungunsten des Faktors Kapital verschieben, so daß mit $\alpha = 1$ für die Kapitalproduktivität sich wieder der Grenzwert (9) einstellt. Allerdings ist hier die Grenzziehung genau umgekehrt, d.h. mit sinkender Kapitalintensität bildet (9) die Obergrenze der möglichen Entwicklung, während eine zunehmende Kapitalintensität auch die bereits aus der Cobb-Douglas Funktion bekannte Abnahme von Y/K bis Null zuläßt. Die den Grenzen von Null bis $(\frac{1}{\gamma})^{\frac{1}{1-\delta}}$ zugehörigen Werte der Kapitalintensität lassen sich abermals aus der Produktionsfunktion (3) ableiten und verhalten sich für Ober- und Untergrenze genau wie im Fall von $\delta > 1$, d.h. der mögliche Höchstwert der Kapitalproduktivität ist mit einer Kapitalintensität von Null gekoppelt, während bei Y/K gleich Null die Kapitalintensität unendlich hoch sein muß.

Diese Grenzen der Kapitalproduktivität sind natürlich nur ein Ausdruck der guten oder schlechten Substitutionsbeziehungen zwischen den Faktoren. Denn ist die Substitutionselastizität größer als Eins, so bedeutet dies, daß das Kapital, welches (relativ) die Arbeit ersetzt, nur ein unterproportionales Absinken seiner Grenzproduktivität hinnehmen muß. Sinkt die Grenzproduktivität des Kapitals jedoch langsamer als im Fall $\delta = 1$, dann wird auch die Abnahme der Kapitalproduktivität gegenüber früher langsamer vorstattengehen, so daß Y/K nicht den Wert von Null erreicht.

Exakt lassen sich die beschriebenen Veränderungen von Einkommensanteil, Kapitalproduktivität und Kapitalintensität aus den Gleichungen (7) und (10) ableiten: Die Veränderung des Einkommensanteils des Kapitals aufgrund unterschiedlicher Kapitalproduktivitäten ergibt sich durch Differentiation von α nach Y/K aus (7):

$$(12) \quad \frac{d\alpha}{d(Y/K)} = \varepsilon \cdot \gamma \left(\frac{Y}{K}\right)^{\varepsilon-1} = \varepsilon \alpha \frac{K}{Y}.$$

Formulierung (12) veranschaulicht, daß die Substitutionselastizität entscheidend für die Verteilungsänderung ist. Im Fall der Cobb-Douglas Funktion mit $\sigma = 1$, d.h. $\xi = 0$, spielt die Kapitalproduktivität keine Rolle, in allen anderen Fällen mit $\sigma \neq 1$ muß sich mit alternativen Werten von Y/K auch α verändern. Eine gute Substituierbarkeit von Kapital und Arbeit ($\sigma > 1$, $-1 < \xi < 0$) hat für eine zunehmende Kapitalproduktivität eine Abnahme der Besitzzeinkommensquote zur Folge¹⁾; die schlechte Substitutionsmöglichkeit verhilft dagegen dem Kapital zu einem höheren Einkommensanteil. Da letztlich jedoch die Veränderung der Kapitalproduktivität durch die Wahl einer anderen Produktionsmethode hervorgerufen wird, ist es notwendig, deren Einflußnahme auf Veränderungen von Y/K durch die Ableitung nach K/L zu analysieren. Dazu muß Gleichung (10) nach K/L differenziert werden:

$$(13) \quad \frac{d\left(\frac{Y}{K}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)} = - \frac{1}{\xi} \left[\gamma + \mu \left(\frac{K}{L}\right)^{\xi} \right]^{-\frac{1}{\xi}-1} \xi \mu \left(\frac{K}{L}\right)^{\xi-1} \\ = \left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\xi} \cdot \mu \left(\frac{K}{L}\right)^{\xi-1} \\ = \mu \left(\frac{Y}{L}\right)^{\xi} \cdot \frac{Y}{K} \cdot \frac{L}{K}$$

$$(14) \quad \frac{d\left(\frac{Y}{K}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)} = \beta \cdot \frac{Y}{K} \cdot \frac{L}{K}$$

Unter der Annahme einer konstanten Verteilung wird sich mit einer Veränderung des Faktoreinsatzverhältnisses die Kapitalproduktivität genau umgekehrt proportional entwickeln. Wie Gleichung (12) nachweist, gilt die Konstanz von α (und damit auch von β) nur unter der Voraussetzung von $\sigma = 1$. Andere Werte der Substitutionselastizität verändern die Produktionselastizitäten, so daß Y/K je nach $\sigma \gtrless 1$ bei steigender Kapitalintensität über- oder unterproportional abnehmen wird.

Die Verbindung von (12) und (14) gestattet letztlich, auch die direkten Auswirkungen der K/L -Veränderungen auf die Einkommensverteilung festzustellen:

$$(15) \quad \frac{d\alpha}{d\left(\frac{Y}{K}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{Y}{K}\right)}{d\left(\frac{K}{L}\right)} = \frac{d\alpha}{d\left(\frac{K}{L}\right)} = \xi \cdot \alpha \cdot \frac{K}{Y} \cdot \beta \cdot \frac{Y}{K} \cdot \frac{L}{K}$$

1) Soper, C.S., The Elasticity of Substitution, in: The Economic Record, Vol. 41, 1965, S. 541.

$$(16) \frac{d\alpha}{d\left(\frac{L}{K}\right)} = \sigma \alpha (1 - \alpha) \frac{L}{K} \quad 1).$$

Ohne Einfluß auf die Einkommensanteile sind natürlich Veränderungen der Kapitalintensität nur dann, wenn die Substitutionselastizität genau gleich Eins ist. Jeder andere Wert für σ dagegen bewirkt bei einer Veränderung der Kapitalintensität auch eine Verschiebung in der funktionalen Einkommensverteilung.

Diese Veränderungen der Einkommensverteilung können offensichtlich nicht ohne Einfluß auf die Ergebnisse des neoklassischen Wachstumsmodells bleiben, denn jede ungleichgewichtige Situation wird hier ja durch eine Variation der Kapitalintensität angezeigt. Die Kombination von $\sigma \geq 1$ und linear-homogener Produktionsfunktion setzt allerdings der Entwicklung der Kapitalproduktivität Grenzen, so daß die in 2.1. gewonnenen Ergebnisse einer Überprüfung bedürfen.

2.2.5. Gleichgewicht und Stabilität des Wachstums.

Im Abschnitt 2.2.3. wurden gewisse Tendenzen der Entwicklung aufgezeigt. Im folgenden sollen an Hand der Swanschen Darstellung in Abbildung 1 diese Tendenzen auf ihre tatsächliche Verwirklichung untersucht werden.

Auf der Grundlage der Cobb-Douglas Funktion stellte sich bei konstanter Sparquote immer ein neoklassisches Gleichgewicht mit $w_Y = w_K = w_L$ ein. Die Konstanz der Kapitalintensität bei einem Gleichgewichtswert k^* geht immer mit der Konstanz der gleichgewichtigen Kapitalproduktivität $\left(\frac{Y}{K}\right)^*$ einher. Ungleichgewichtige Situationen infolge einer Variation der Sparquote werden durch die umgekehrt proportionale Veränderung der Kapitalproduktivität bereinigt, wobei Y/K alle Werte von Null bis Unendlich annehmen kann. Im Gleichgewicht wiederum wird die neue Kapitalproduktivität $\left(\frac{Y}{K}\right)^*$ durch den Quotienten aus Wachstumsrate der Arbeit und Sparquote determiniert. Dieser entspricht eine neue gleichgewichtige Kapitalintensität k^* , die ebenfalls alle Werte von Null bis Unendlich annehmen kann. Die Konstanz von K/L , d.h. die Übereinstimmung der Wachstumsraten von Arbeit und Kapital, ist ebenso ein eindeutiges Indiz wie die konstante Kapitalproduktivität $\left(\frac{Y}{K}\right)^* = \frac{n}{s}$.

Diese Gleichgewichtssituation als solche hat mit dem Wert der Sub-

1) Soper, C.S., The Elasticity...a.a.O., S. 541.

stitutionselastizität nichts zu tun, da eben ihr Charakteristikum die Konstanz der Produktionsmethode ist. Das bedeutet, daß auch unter der Verwendung einer CES-Funktion an der Möglichkeit eines Gleichgewichtspfades kein Zweifel besteht. Die Existenz eines störungsfreien Wachstums ist durch die Annahme einer Substitutionselastizität ungleich Eins nicht getroffen. Ist einmal durch irgendeinen Zufall die Übereinstimmung der Wachstumsraten von Arbeit und Kapital hergestellt, so vollzieht sich bei konstanter Sparquote ein durch n vorbestimmter Wachstumsprozeß mit einer invarianten Rate. Treten allerdings Störungen auf, so kommt der Höhe der Substitutionselastizität eine entscheidende Bedeutung bei.

Die neoklassische Wachstumsanalyse auf der Grundlage einer CES-Funktion verlagert somit die Fragestellung mehr auf die Untersuchung der Stabilität. Die zu Beginn erwähnten vier Fälle: a) $\delta < 1$; $w_K > w_L$, b) $\delta < 1$; $w_L > w_K$, c) $\delta > 1$; $w_K > w_L$ und d) $\delta > 1$; $w_L > w_K$ als Zeichen eines Ungleichgewichts rücken so in den Vordergrund der Betrachtung.

Die Veränderung der Kapitalintensität stellt das äußere Zeichen einer Störung dar, und sie ist im Zusammenhang mit dem konstanten Wert der Substitutionselastizität verantwortlich für die tatsächliche Entwicklung der Kapitalproduktivität und des Einkommens. Ausgangspunkt der Analyse stelle der empirisch getestete Fall einer Substitutionselastizität von kleiner als Eins dar. Bei weiterhin exogen bestimmter Wachstumsrate der Arbeit n wird die des Kapitals durch Sparquote und Kapitalproduktivität determiniert. Ist durch das System die Kapitalproduktivität in ihrer quantitativen Entwicklung begrenzt, so gilt das - bei konstanter Sparquote - auch für die Wachstumsrate des Kapitalstocks. Unter der Annahme von $\delta < 1$ kann auch durch eine gegen Null gehende Kapitalintensität die Kapitalproduktivität nur bis $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\delta}}$ steigen, so daß $s(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\delta}}$ die Obergrenze der Wachstumsrate des Kapitals bildet. Legt man die Swansche Abbildung zugrunde, so existieren für Abbildung 5¹⁾ auf der Abzisse nur die relevanten Werte der Kapitalproduktivität von Null bis $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\delta}}$. Die Höhe der Wachstumsrate der Arbeit und die der Sparquote s - also jene Parameter, die die Gleichgewichtshöhe der Kapitalproduktivität definieren - erlangen jetzt die entscheidende Bedeutung für die tatsächlich zu verwirklichende Höhe der Wachstumsrate des Einkommens.

1) Pitchford, J.D., Growth and the...a.a.O., S. 496.

Die Höhe des Arbeitswachstums drückt sich in dem Ansatzpunkt auf der Ordinate aus, die Höhe der Sparquote bestimmt die Wachstumsrate des Kapitals mit, indem sie das Steigungsmaß der w_K -Linie bildet. Offensichtlich sind so n und s für die Lage der Funktionen im relevanten Bereich von Null bis $(\frac{1}{\gamma})^{\frac{1}{\beta}}$ verantwortlich. Zwei Möglichkeiten bieten sich hier an: w_K und w_L schneiden sich vor der kritischen Grenze der Kapitalproduktivität von $(\frac{1}{\gamma})^{\frac{1}{\beta}}$ oder erst danach. Diese beiden Fälle sind auch identisch mit den Konstellationen $w_K > w_L$ und $w_L > w_K$. Die erste Möglichkeit ist um so wahrscheinlicher, je größer s und je kleiner w_L ist, denn dadurch muß auch die gleichgewichtige Kapitalproduktivität $(\frac{Y}{K})^*$ klein sein.

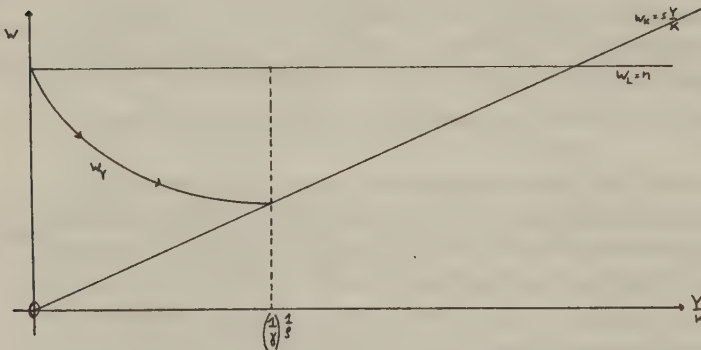


Abb. 5

In Abbildung 5 besteht die Annahme einer relativ hohen Wachstumsrate der Arbeit und einer verhältnismäßig geringen Sparquote s , so daß die gleichgewichtige Kapitalproduktivität relativ groß ist. In der Ausgangssituation bei gegen Null gehenden Werten von Y/K ist nun eine allein durch das Arbeitswachstum determinierte Wachstumsrate des Einkommens zu erwarten, da bei $\delta < 1$ und $\beta = 1$ nach Gleichung (12) in 2.1.2. das tatsächliche Einkommenswachstum durch w_L bestimmt ist. Diese Situation kann nur kurzfristig bestehen bleiben, da unter der Annahme einer verteilungsunabhängigen Sparquote aus dem Einkommen ein konstanter Bruchteil der Kapitalbildung zugeführt wird, so daß auch der Faktor Kapital zum Einkommenswachstum beiträgt. Damit verändert sich das Faktoreinsatzverhältnis, die unendlich große anfängliche Kapitalintensität vermindert sich. Daraufhin erhöht sich aber die Kapitalproduktivität, wobei

deren quantitative Entwicklung durch die Annahme einer Substitutionselastizität von kleiner Eins mitbestimmt wird. Die schlechte Substituierbarkeit in einer Situation, in der Kapital durch Arbeit ersetzt werden muß ($w_L > w_K$), führt zu einer starken Grenzproduktivitätserhöhung des Kapitals. Bei abnehmendem Kapitalkoeffizienten (zunehmender Kapitalproduktivität) und stark ansteigender Grenzproduktivität ergibt sich der bekannte Prozeß der Umverteilung des Einkommens zugunsten des Kapitals. Die Produktionselastizität verändert sich also gleichfalls von Null gegen Eins. Für den Einkommensanteil der Arbeit bzw. deren Produktionselastizität muß sich zwangsläufig die umgekehrte Bewegung ergeben, denn dem steigenden Arbeitskoeffizienten L/Y steht eine stark sinkende Grenzproduktivität gegenüber, so daß sich β vermindert. Die Wachstumsrate des Einkommens setzt sich jedoch weiterhin aus den Wachstumsraten der Faktoren gewichtet mit ihren Produktionselastizitäten zusammen. In der Situation der Abbildung 5 übertrifft die Wachstumsrate der Arbeit ständig die des Kapitals, so daß die Höhe von w_Y relativ stärker von w_L bestimmt wird. Kommt es aber allmählich zum Umverteilungsprozeß, so verlagert sich die Bedeutung der Gewichte immer mehr in Richtung der Konstellation $\beta = 0$ und $\alpha = 1$, so daß der prozentual geringer wachsende Faktor immer mehr an Gewicht gewinnt. Die Wachstumsrate des Einkommens von ursprünglich $w_Y = w_L$ wird sich durch diese Gewichtsverlagerung vermindern müssen, selbst wenn die Arbeit der stärker wachsende Faktor bleibt. Da der Umverteilungsprozeß mit der Annäherung an $\alpha = 1$ in der Zeit mit immer kleineren Schritten erfolgt, d.h. die Anpassung mit abnehmender Kapitalintensität gegen $\frac{K}{L} = 0$ asymptotisch verläuft, wird auch die Abnahme der Wachstumsrate in der Zeit in absolut immer geringeren Raten vonstattengehen. Anders ausgedrückt, mit positiver, steigender Wachstumsrate des Kapitals wird die Differenz zwischen w_L und w_K immer kleiner. In Verbindung mit steigender Produktionselastizität des Kapitals sinkt also die relative Wichtigkeit der wachsenden Arbeit durch die Annäherung von w_K an w_L , so daß der Effekt der steigenden Wachstumsrate des Kapitals immer stärker durchschlägt und w_Y somit eine relative Steigerung erfährt, d.h. in immer kleineren Schritten abnimmt. Dieser Prozeß findet sein Ende, wenn durch die ständige Substitution von Kapital durch Arbeit ($w_L > w_K$) die Kapitalintensität praktisch auf Null abgesunken

ist und die Kapitalproduktivität dadurch ihren Gegenwert von $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\beta}}$ erreicht hat. Das Einkommen wird hier voll dem Faktor Kapital zuteil. Ursache dieses Endstadiums mit $w_Y = w_K < w_L$ ist letztlich die durch $\delta < 1$ repräsentierte schlechte Austauschbarkeit der Faktoren Arbeit und Kapital. Die ständige Kapitalintensitätsabnahme läßt die Kapitalproduktivität nicht auf die notwendige gleichgewichtige Höhe ansteigen, sondern nur bis zu dem kleineren Wert $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\beta}}$. Bei konstanter Sparquote s ist auch in dieser Situation der Wachstumsprozeß in dem Sinne störungsfrei, daß w_Y eine konstante Rate darstellt. Die invariante Kapitalproduktivität wird durch die Identität von w_Y und w_K gewährleistet. Allerdings muß dieses Gleichgewicht mit einer geringeren Wachstumsrate des Einkommens bezahlt werden, denn w_Y ist geringer als in der Ausgangsposition oder im vergleichbaren einfachsten Modell mit $\delta = 1$, da w_Y die Wachstumsrate der Arbeit unterschreitet.

Diese niedrige Wachstumsrate des Einkommens wird durch einen Substitutionsprozeß verursacht, der durch $w_L > w_K$ hervorgerufen wird. Der Umverteilungsprozeß zugunsten des geringer wachsenden Faktors läßt die Kapitalproduktivität nicht gegen Unendlich ansteigen, so daß auch im neuen Gleichgewicht die Kapitalproduktivität nicht mehr durch n/s definiert ist.

Letzteres muß jedoch dann zu verwirklichen sein, wenn es innerhalb der möglichen Extremwerte der Kapitalproduktivität zu einem Umschlag der Wachstumsraten kommt, so daß der anfangs schwächer wachsende Faktor im Zeitablauf zu dem stärker wachsenden wird. Diese Situation besteht in Abbildung 6,¹⁾ in der im Vergleich zu Abbildung 5 entweder die Wachstumsrate der Arbeit geringer ist und/oder die Sparquote höher. Nimmt man wiederum eine Ausgangslage von $\frac{Y}{K} = 0$ an, so läuft der Anpassungsprozeß anfangs genau wie in Abbildung 5 ab. Im Unterschied zur vorangegangenen Situation sind die anfänglichen Divergenzen zwischen den Wachstumsraten von Arbeit und Kapital nicht so groß. Die während der Ungleichgewichtssituation einflußnehmenden Effekte, d.h. die Annäherung von w_K und w_L und die Gewichtsverlagerung zugunsten des Faktors Kapital, bewirken jetzt eine Realisierung des typischen neoklassischen Gleichgewichtszustandes mit $w_Y = w_K = w_L$. Die absolut höhere Wachstumsrate der Arbeit übertrifft zwar anfangs die des Kapitals und wird in Verbindung mit der hohen Produktionselastizität β (bei

1) Pitchford, J.D., Growth and the...a.a.O., S. 496.

geringer Kapitalproduktivität) den Hauptteil des wachsenden Einkommens beitragen. Jedoch ist der absolute Unterschied zwischen beiden Wachstumsraten nicht so groß, d.h. aber auch, daß die durch den Substitutionsprozeß hervorgerufene Gewichtsverlagerung schneller an Bedeutung gewinnt. Die hohe Sparquote in Zusammenhang mit der steigenden Produktionselastizität des Kapitals macht selbst bei relativ kleinen Werten der Kapitalproduktivität $(\frac{Y}{K} < (\frac{1}{\beta})^{\frac{1}{\beta}})$ das

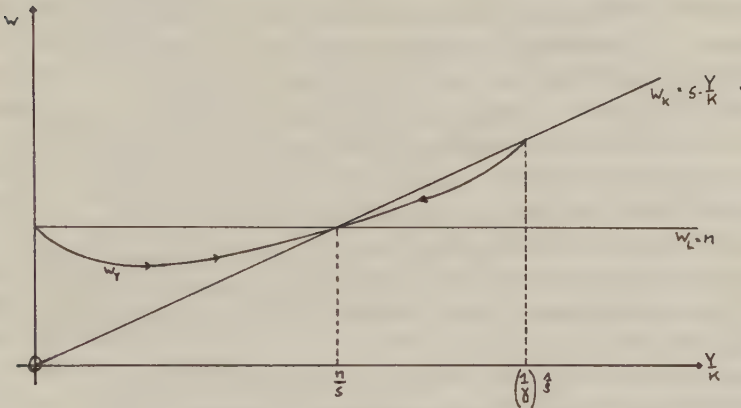


Abb. 6

Kapital zum wesentlichen Faktor in der Bestimmung des Einkommenszuwachses. Die Erhöhung der Wachstumsrate des Einkommens ab einer bestimmten Kapitalproduktivität (deren Wert natürlich von der Höhe der Sparquote und der in diesem Moment geltenden Produktionselastizität des Kapitals abhängt) vollzieht sich so lange, wie die Kapitalintensität abnimmt, denn dadurch besteht ja weiterhin die Tendenz α und Y/K zu erhöhen. Die Abnahme von K/L muß jedoch im Zeitablauf immer geringer werden, da sich die Wachstumsraten von Arbeit und Kapital immer mehr annähern. Die daraus resultierenden Einflüsse auf α , β , Y/K und damit auch auf K/L selbst werden immer kleinere Veränderungen hervorrufen, bis schließlich im Punkt $w_L = w_K = w_Y$ die Störung beseitigt ist. Hier ist ein stabiles Gleichgewicht wie unter der Voraussetzung von $\phi = 1$ verwirklicht, die Kapitalproduktivität hat ihren Gleichgewichtswert von n/s erreicht. Der Prozeß zum Gleichgewicht vollzieht sich also

derart, daß mit zunehmender Kapitalproduktivität bei konstanter Sparquote die Wachstumsrate des Kapitals eine gleichgewichtige Höhe annehmen kann, ohne vorher an die ihr durch $\phi < 1$ gesetzte Grenze von $s(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\phi}}$ zu stoßen. Während des Anpassungsprozesses übertrifft w_L w_K , so daß wegen der abnehmenden Grenzerträge das Einkommen einerseits geringer als das Arbeitspotential zunimmt, andererseits aber auch stärker als das Kapital anwächst. Die dadurch ansteigende Kapitalproduktivität impliziert eine zum Einkommenswachstum überproportionale Steigerung der Wachstumsrate des Kapitals. In Abbildung 6 verläuft deshalb die w_Y -Linie immer mit schwächerer Steigung als die w_K -Linie. Die dadurch - wenn auch degressiv - ansteigende Kapitalproduktivität vermittelt Impulse, die zur weiteren Erhöhung der Wachstumsrate des Kapitals Anstoß geben. Der abnehmende Zuwachs der Kapitalproduktivität selbst ist das Zeichen der sich annähernden w_Y - und w_K -Linien. Mit geringer werdenden Diskrepanzen ist die Angleichung ebenfalls nur asymptotisch, so daß die Anpassungsgeschwindigkeit bei näher am Gleichgewichtswert der Kapitalproduktivität liegenden Y/K -Größen überproportional abnimmt.

Grundsätzlich ist somit dieser Fall mit dem einfachsten Modell identisch. Jedoch verlangen zwei Unterschiede Beachtung: Einmal werden Störungen in Verbindung mit einer Einkommensumverteilung beseitigt, zum anderen wird die Anpassungsgeschwindigkeit noch geringer sein. Denn während unter der Voraussetzung von $\phi = 1$ die Grenzproduktivität der Arbeit sich proportional zum Arbeitskoeffizienten ändert, muß im vorliegenden Fall die Grenzproduktivität überproportional sinken. Für den Kapitalkoeffizienten gilt damit das umgekehrte, d.h. er wird nur unterproportional abnehmen, so daß bei konstanter Sparquote das Wachstum des Kapitals sich in kleineren, abnehmenden Raten vollziehen muß.

Die anfänglich Vermutung, daß bei $\phi < 1$ und $w_L > w_K$ ein Endstadium erreicht wird, in dem Kapital und Einkommen mit gleicher Rate wachsen, wird nur teilweise bestätigt. Die Produktionselastizität des Kapitals wird erst in jenem Augenblick gleich Eins, wenn das System seine Grenze erreicht hat. Daß es tatsächlich soweit kommt, hängt von der Höhe der Parameter n und s ab. Je geringer die Wachstumsrate der Arbeit ist (bei gleichbleibender Sparquote), um so wahrscheinlicher wird der neoklassische Gleichgewichtsfall des ersten Modells in 2.1. Allerdings ist das auch gleichbedeutend mit einer

niedrigen Wachstumsrate des Einkommens. Während unter der Annahme von $\delta = 1$ jede Wachstumsrate der Arbeit mit einem Gleichgewichtspfad vereinbar ist, besteht jetzt mit höherem n die Gefahr des 'Überflusses' der Arbeit. Aber das System selbst kennzeichnet die zur effizienteren Ausnutzung der stark wachsenden Arbeit notwendige Therapie: die Wirtschaftspolitik muß auf eine Erhöhung der Sparquote hinwirken. Bevor jedoch diese Möglichkeit bzw. ihre Notwendigkeit einer genaueren Betrachtung unterzogen wird, seien die anderen Konstellationen von Wachstumsraten und Substitutionselastizität hinsichtlich ihrer Ergebnisse überprüft.

Ist die Substitutionselastizität kleiner als Eins, aber die Wachstumsrate des Kapitals höher als die der Arbeit, so ist die Abbildung 6 weiterhin verwendbar. Wird die Ausgangssituation durch einen Wert der Kapitalproduktivität von $(\frac{1}{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$ beschrieben, so wird bei einer Kapitalintensität von Null durch $w_K > w_L$ ein Substitutionsprozeß einsetzen, der die Kapitalproduktivität vermindert. Mit dem Rückgang von Y/K geht die Abnahme der Produktionselastizität des Kapitals Hand in Hand, da wegen $\delta < 1$ die Grenzproduktivität des Kapitals stark sinkt. Dennoch muß dieser Prozeß nicht mit $w_Y = w_L$ und $\beta = 1$ enden, wie zu Beginn vermutet wurde. Die Zunahme der Kapitalintensität muß sich nämlich in degressiver Form vollziehen, da die Arbeit konstant mit n -Prozent wächst und die Wachstumsrate des Kapitals von der Höhe der Kapitalproduktivität mitbestimmt wird. Da die Kapitalproduktivität wegen $\delta < 1$ abnimmt, unterliegt auch die Wachstumsrate des Kapitals diesem Verlauf, so daß sich nach unendlich langer Anpassungszeit wiederum das Gleichgewicht mit $w_Y = w_L = w_K$ einspielt. Sofern $w_K > w_L$, muß das Kapital der für das Einkommenswachstum wichtigere Faktor sein. Eine Umschichtung der Produktionselastizitäten zugunsten der Arbeit bewirkt somit einen zuerst starken Rückgang der Wachstumsrate des Einkommens, der jedoch im Verlauf der Zeit vermindert wird, da sich die Wachstumsrate des Kapitals auch gleichzeitig in diesem Prozeß der der Arbeit nähert. Der anfangs beschriebene Endzustand mit $w_Y = w_L$ ist folglich unter dieser Konstellation der Parameter nicht zu verwirklichen, es sei denn, die Wachstumsrate der Arbeit sei annähernd gleich Null, so daß der Prozeß in einem stationären Gleichgewicht mit $w_Y = w_L = 0$ mündet.

Es bleiben also auch unter der Verwendung einer CES-Funktion mit

$\delta < 1$ die für die neoklassische Wachstumstheorie typischen Tendenzen zum Gleichgewicht bestehen, wenn auch nicht immer der 'ideale' Endzustand verwirklicht werden kann.

Damit bleibt zu untersuchen, welche Gleichgewichtspunkte unter der Voraussetzung einer Substitutionselastizität von größer als Eins entstehen können. Für alle denkbaren Werte der Kapitalintensität kann sich die Kapitalproduktivität jetzt nur in den Grenzen zwischen $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\delta}}$ und Unendlich bewegen. Im Swanschen Diagramm ist der für die Analyse relevante Bereich durch Abszissenwerte größer als $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\delta}}$ gekennzeichnet. An Hand von Abbildung 7¹⁾ wird die Konsequenz einer Substitutionselastizität größer als Eins bereits zeichnerisch deutlich, denn jetzt wird ein neoklassisches Gleichgewicht mit $w_Y = w_K = w_L$ um so unwahrscheinlicher, je kleiner die Wachstumsrate der Arbeit und/oder je höher die Sparquote ist. Analog zu den Abbildungen 5 und 6 wird die Ausgangssituation dadurch festgelegt, daß sich die w_K - und w_L -Linie innerhalb oder außerhalb der erreichbaren Y/K -Werte schneiden. Übertrifft ebenso wie in Abbildung 6 die Wachstumsrate des Kapitals die der Arbeit, so steigt die Kapitalintensität an. So lange sie nicht gegen Unendlich geht, wird die Kapitalproduktivität durch irgendeinen endlichen Wert

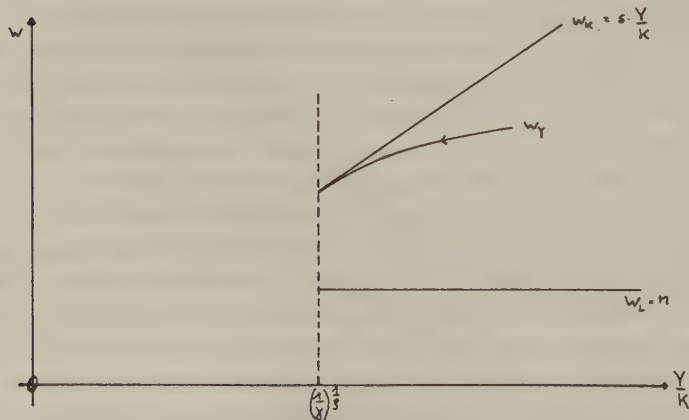


Abb. 7

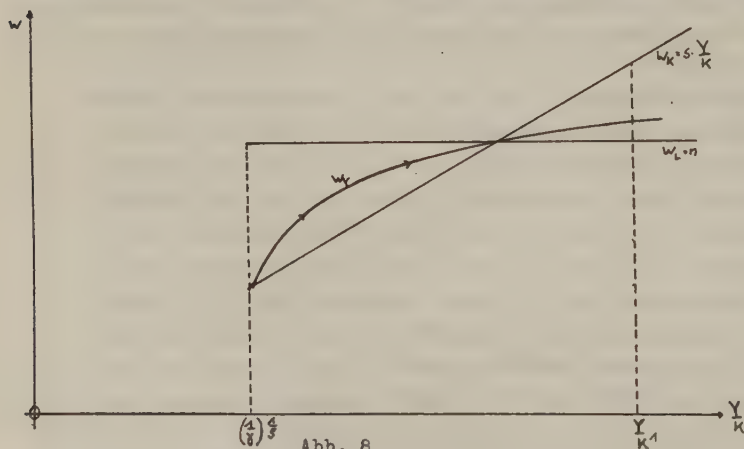
zwischen $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\delta}}$ und Unendlich festgelegt sein. In Abbildung 7 kann deshalb jeder Y/K -Wert größer als $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{1-\delta}}$ als Ausgangspunkt der Betrachtung dienen, denn überall wächst die Arbeit mit einer gerin-

1) Pitchford, J.D., Growth and the...a.a.O., S. 496.

geren Rate als das Kapital, so daß die Kapitalintensität ansteigt. Damit muß wegen der abnehmenden Grenzerträge des Kapitals die Kapitalproduktivität zurückgehen und der Prozeß wird von jeder $\frac{Y}{K} > (\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{\delta}}$ in Richtung auf die Ordinate verlaufen. Diese abnehmende Kapitalproduktivität in Verbindung mit einer konstanten Sparquote läßt auch die Wachstumsrate des Kapitals sinken und sich der konstanten Rate der Arbeit annähern. Die Verminderung der absoluten Differenz zwischen den Wachstumsraten äußert sich in einer degressiven Abnahme der Kapitalintensität. Da unter der Annahme von $\delta > 1$ Arbeit und Kapital gute Substitute darstellen, wird durch den relativen Austausch von Arbeit durch Kapital die Grenzproduktivität des Kapitals nur unterproportional zur Erhöhung des Kapitalkoeffizienten sinken, so daß die Produktionselastizität des Kapitals ansteigt. Übertrifft die Wachstumsrate des Kapitals die der Arbeit, so wird die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens als gewichtetes Mittel der Wachstumsraten der Faktoren zwischen w_K und w_L liegen. Mit ansteigender Kapitalintensität werden die abnehmenden Grenzerträge w_Y erhöhen bzw. bei sinkender Zuwachsrates der Kapitalintensität unterproportional abnehmen lassen. Der Rückgang von w_Y muß auch unterproportional zur Verminderung der Wachstumsrate des Kapitals erfolgen, da w_K zwar abnimmt, gleichzeitig aber das Gewicht α dieser Wachstumsrate zunimmt. Dieses immer stärker zur Geltung kommende Gewicht ist außerdem für die Annäherung der Wachstumsrate des Einkommens an die des Kapitals verantwortlich. Im Endpunkt schließlich müssen Einkommen und Kapital wegen $\alpha = 1$ sich mit gleicher Rate entwickeln. Hier wird auch die Kapitalproduktivität ihren Extremwert von $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{\delta}}$ erreicht haben. Der Anpassungsprozeß vollzieht sich wie in allen anderen Fällen mit abnehmender Geschwindigkeit, da die Abnahme der Wachstumsrate des Kapitals durch die ständig langsamer sinkende Kapitalproduktivität (infolge des degressiven Rückgangs der Kapitalintensität) mit immer kleineren Raten erfolgt. Unter der vorgegebenen Konstellation der Parameter bildet sich also ein Wachstumspfad, bei dem die konstante Wachstumsrate des Einkommens die der Arbeit übertrifft. Die Bestätigung der anfänglichen Vermutung, daß mit der Annahme von $\delta > 1$ und $w_K > w_L$ ein Endstadium mit $w_Y = w_K > w_L$ realisiert wird, scheint gefunden.

Allerdings handelt es sich hierbei um einen Spezialfall, der nur

unter gewissen Bedingungen, d.h. bestimmten Werten für s und n , eintritt. Der Nachweis läßt sich mit Hilfe von Abbildung 8¹⁾ führen, die im Gegensatz zu Abbildung 7 eine geringere Sparquote unterstellt. Bildet jetzt eine Kapitalproduktivität von der Höhe $\frac{Y}{K}^1$ den Ansatzpunkt der Betrachtung, dann vollzieht sich zu Beginn derselbe Prozeß, wie er im vorangegangenen Diagramm 7 beschrieben wurde. Jedoch wird er unter den Voraussetzungen der Abbildung 8 in einem Gleichgewichtspfad münden, der dem unter der Annahme von $\delta = 1$ entspricht. Ursache hierfür ist, daß die sich degressiv entwickelnde Kapitalintensität eine Abnahme der Kapitalproduktivität bis zu einem Wert bewirkt, der bei vorgegebener Sparquote die Übereinstimmung von w_K und w_L herstellt. Die absolut ansteigende Kapitalintensität läßt (über die sich vermindernde Kapitalproduktivität) bei konstanter Sparquote die Wachstumsrate des Kapitals sinken. Dieser Rückgang führt - nach unendlich langer Anpassungszeit - zu einer Wachstumsrate des Kapitals, die mit der der Arbeit identisch ist, ohne daß dazu eine Erhöhung der Kapitalintensität gegen Unendlich notwendig ist. Diese Tendenz zur konstanten Kapi-



talintensität wohnt dem System wegen der Annahme einer linear-homogenen Funktion, die abnehmende Grenzerträge impliziert, immer inne. Allein die Ausgangsposition, d.h. die Höhe der Sparquote und der Wachstumsrate der Arbeit bestimmt, ob sich diese Tendenz vollständig durchsetzt oder ob vorher durch eine sich nicht mehr bei

1) Pitchford, J.D.; Growth and the...a.a.O., S. 496.

einem endlichen, konstanten Wert einrichtende Kapitalintensität der vollständigen Anpassung eine Grenze gesetzt wird.

Abbildung 8 ermöglicht es auch, den letzten Fall der zu Beginn aufgestellten Konstellationen mit $\beta > 1$ und $w_L > w_K$ zu untersuchen. Ist in der Ausgangslage die Kapitalintensität unendlich hoch, dann bestimmt sich der Zuwachs zum Einkommen allein durch die Kapitalakkumulation, da die Produktionselastizität der Arbeit gleich Null ist. Übertrifft aber in dieser Situation die Wachstumsrate der Arbeit die des Kapitals, so nimmt die Kapitalproduktivität ständig zu. Dem abnehmenden Kapitalkoeffizienten steht wegen der guten Substituierbarkeit der Faktoren nur eine relativ geringe Zunahme der Grenzproduktivität des Kapitals gegenüber, so daß die Produktionselastizität des Kapitals sinkt. Da gleichzeitig die Arbeit um einen höheren Prozentsatz als das Kapital zunimmt, ausserdem eine Umverteilung der Gewichte von α nach β stattfindet, muß das Einkommen sich mit einer die Wachstumsrate des Kapitals übertreffenden Rate entwickeln. Diese Zunahme der Wachstumsrate des Einkommens ist jedoch degressiv, da mit einer Annäherung der steigenden Wachstumsrate des Kapitals an die konstante Wachstumsrate der Arbeit letztere für das Einkommenswachstum immer mehr Bedeutung gewinnt. So lange der Umverteilungsprozeß die Produktionselastizität der Arbeit nicht allzusehr erhöht hat, wie es in der Ausgangsposition zu erwarten ist, wird sich die Zunahme von w_K auf das Einkommen in stärkerem Maße auswirken. Bei höheren Werten der Kapitalproduktivität (d.h. höherem w_K) macht sich dagegen die jetzt stärker gesunkene Produktionselastizität des Kapitals bemerkbar, so daß trotz höheren Kapitalwachstums das Einkommenswachstum nicht mehr so stark wie zu Beginn durch w_K determiniert ist. Daraus erklärt sich der degressive Verlauf von w_Y in Abbildung 8. Mit der Annäherung der Wachstumsraten von Arbeit und Kapital wird sich gleichzeitig die Geschwindigkeit der Kapitalintensitätsverminderung abschwächen. Damit werden die Zuwächse zur Kapitalproduktivität immer geringer, was wiederum zu einer in kleiner werdenden Schritten vorstattgehenden Zunahme von w_K führt. Das Endstadium des typischen neoklassischen Gleichgewichts mit $w_Y = w_K = w_L$ wird nach einem unendlich langen Anpassungsprozeß erreicht, auch wenn die Substitutionselastizität größer als Eins ist. Voraussetzung ist eine verhältnismäßig hohe Wachstumsrate

der Arbeit und/oder eine relativ kleine Sparquote. Aber auch hier wird die Angleichung der Wachstumsraten ebenso wie bei $\beta < 1$ nur in Verbindung mit einer Einkommensumverteilung zu verwirklichen sein.

Von diesen theoretisch interessanten Fällen sind natürlich nur jene erstrebenswert, die ein Gleichgewicht mit übereinstimmenden Raten von Einkommen, Arbeit und Kapital zur Folge haben. Es liegt also nahe, festzustellen, unter welchen Voraussetzungen das typische neoklassische Gleichgewicht tatsächlich verwirklicht wird. Als unrealistisch sind unter diesem Blickpunkt sicherlich jene Konstellationen anzusehen, die die Wachstumsrate des Einkommens allein von der Höhe des Bevölkerungswachstums abhängig machen, d.h. die Fälle a) mit $\beta < 1$; $w_K > w_L$ und d) mit $\beta > 1$; $w_L > w_K$. Die unrealistische Verteilungssituation möge auch Grund genug sein, Lösungen mit $w_Y = w_K$ und $\alpha = 1$ auszuschneiden.

Im Mittelpunkt der Untersuchung bleiben dagegen die anderen aufgezeigten Gleichgewichtsstadien. Ob diese tatsächlich zu verwirklichen sind, hängt allein von der Höhe der Werte s und n ab. Bekannt ist nur, daß in hoch entwickelten Volkswirtschaften die Wachstumsrate der Arbeit kleiner ist als die durchschnittliche Sparquote. Damit fehlen jedoch noch Kenntnisse über den Wert der Substitutionselastizität und den Distributionsparameter, so daß Pitchford zu der pessimistischen Ansicht gelangt, daß von vornherein keine Aussage über die Realitätsnähe der unterschiedlichen Fälle getroffen werden kann¹⁾.

Da bei gegebener Wachstumsrate der Arbeit unter der Voraussetzung von $\beta \neq 1$ jedoch über die Sparquote Einfluß auf die Höhe der Wachstumsrate genommen werden kann, scheint eine derartige pessimistische Anschauung nicht gerechtfertigt. Wie ein Blick auf Abbildung 6 beweist, ist es nur unter der Voraussetzung schlechter Substituierbarkeit und bei automatischer Anpassung an das neoklassische Gleichgewicht mit $w_Y = w_K = w_L$ nicht mehr möglich, die Wachstumsrate des Einkommens zu erhöhen. Alle anderen Fälle unterliegen der Beeinflussung durch die Sparquote, so daß durch ihre Variation befriedigende Gleichgewichtslösungen möglich werden. Die Erhöhung der Sparquote hat keinen Einfluß auf die Grenzwerte der Kapitalproduktivität; sie erhöht nur die Steigung der w_K -Linie. Ein Vergleich der Endzustände verliert darüber hinaus auch an Bedeutung,

1) Pitchford, J.D., Growth and the...a.a.O., S. 495.

da die Dauer der Anpassung sehr lang ist.

Einen interessanten Aspekt offenbart noch die der Abbildung 7 zugrundeliegende Konstellation, die für gegebene Werte von $w_L = n$ und s das geringst mögliche Einkommenswachstum impliziert. Wird die Wachstumsrate des Kapitals in der Form $s \frac{Y}{K}$ in die Gleichung (12) aus 2.1.1. $w_Y = \alpha w_K + \beta n$ eingesetzt und werden die Produktionselastizitäten gemäß (7) und (8) eliminiert, dann folgt:

$$(17) \quad w_Y = \gamma \left(\frac{Y}{K} \right)^s \cdot s \cdot \frac{Y}{K} + \mu \left(\frac{Y}{K} \right)^s n = \gamma^s \left(\frac{Y}{K} \right)^{s+1} - \left[1 - \gamma \left(\frac{Y}{K} \right)^s \right] n.$$

Die Veränderung der Wachstumsrate des Einkommens aufgrund einer Veränderung der Kapitalproduktivität ist durch die Ableitung von (17) nach Y/K erhältlich¹⁾:

$$(18) \quad \frac{d w_Y}{d \left(\frac{Y}{K} \right)} = \gamma^s (s+1) \left(\frac{Y}{K} \right)^s - \gamma^s n \left(\frac{Y}{K} \right)^{s-1}.$$

Die Wachstumsrate des Einkommens wird nach (16) also nur zunehmen, wenn die Substitutionselastizität absolut größer als Eins ist, d.h. $-1 < \epsilon < 0$. Sind alle Variablen konstant, so ist w_Y eine monoton steigende Funktion der Sparquote. Die konstante Wachstumsrate des Einkommens (wenn auch nicht die des neoklassischen Gleichgewichts) ist dort am niedrigsten, wo auch die Kapitalproduktivität ihre Untergrenze besitzt, denn dort ist, wie Abbildung 7 zeigt, $w_Y = w_K = s \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-s}}$. Von jedem Wert für $\frac{Y}{K} > \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-s}}$ muß die Wachstumsrate des Einkommens absinken, so daß wiederum dieser niedrigste Wert des Einkommenswachstums realisiert wird.

2.2.6. Die Plausibilität eines neoklassischen Gleichgewichtspfadcs unter der Voraussetzung einer CES-Funktion.

In den beiden nicht zum neoklassischen Gleichgewicht führenden Fällen der Abbildungen 5 ($\delta < 1$; $w_L > w_K$) und 7 ($\delta > 1$; $w_K > w_L$) bestimmt sich die Sparquote im Endstadium als $s = n / \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-s}}$. Dieser Wert der Sparquote verhindert an der Grenze der Kapitalproduktivität $\left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-s}}$ eine Gleichgewichtslösung im Sinne der Neoklassik mit $s = n / \frac{Y}{K}$. Die Abbildungen 5 und 7 kennzeichnen diese 'Ungleichgewichtspfade', in Abbildung 5 ist $s = w_Y / \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-s}}$ und $w_Y < w_L = n$ und in Abbildung 7 ist $s = w_Y / \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-s}}$ und $w_Y > w_L = n$. Im Fall der Abbildung 5 ist also die

1) Pitchford, J.D., Growth and the...a.a.O., S. 500.

tatsächliche Sparquote s kleiner als die gleichgewichtige $\bar{s}$, in Abbildung 6 besteht die umgekehrte Situation.

Sieht man nur jene Gleichgewichtsfälle mit konstanter Rate w_Y als wünschenswert an, die auch den typischen neoklassischen Pfad mit $w_Y = w_K = w_L$ beinhalten, so lassen sich diese bei einem bestimmten Wert der Sparquote garantieren.

Sieht man von externen Eingriffen ab, die eine Veränderung der bestehenden Sparquote hervorrufen ab, so läßt sich die Plausibilität der Fälle in den Abbildungen 5 und 7 an Hand eines Vergleichs der empirisch festgestellten Sparquoten und den zur Erfüllung des Gleichgewichtswachstums notwendigen, kritischen Werten der Sparquote überprüfen. Liegt für realistische Werte von n und γ in Abbildung 5, d.h. bei $b < 1$, die tatsächliche Sparquote s über der durch das System festgelegten kritischen Sparquote $\bar{s}$, so ist der 'Ungleichgewichtsfall' mit $w_Y = w_K = w_L$ nicht plausibel. In Abbildung 6, d.h. bei $b > 1$, gilt das Umgekehrte.

Zur Verwirklichung des typischen neoklassischen Gleichgewichtspfades muß der Wert der Sparquote dem Quotienten aus Wachstumsrate der Arbeit und Kapitalproduktivität gleich sein. Der kritische Wert für s bestimmt sich im Modell dann natürlich aus dem gerade noch erreichbaren Wert der Kapitalproduktivität $(\frac{1}{\gamma})^{\frac{1}{1-\gamma}}$, so daß $\bar{s}$ mit $n/(\frac{1}{\gamma})^{\frac{1}{1-\gamma}}$ übereinstimmt.

In Abbildung 5 wird $s < \bar{s}$ ein neoklassisches Gleichgewicht unmöglich machen, in Abbildung 7 $s > \bar{s}$. Pitchford glaubt nun, diesen kritischen Wert $\bar{s}$ nicht berechnen zu können, da "we do not know anything about the value of γ "¹⁾.

Es ist jedoch nicht notwendig, die Analyse damit abzubrechen, da zwischen dem Distributionsparameter γ und der Produktionselastizität α irgendwelche Beziehungen bestehen müssen, die es gestatten, γ durch bekannte oder leicht zu schätzende Größen auszudrücken²⁾:

$$(19) \quad \alpha = \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y} = \gamma \left(\frac{Y}{K} \right)^{\gamma}$$

Durch Verwendung von Gleichung (18) läßt sich die Produktionselastizität des Kapitals aber auch folgendermaßen determinieren:

$$(20) \quad \alpha = \gamma \left(\frac{Y}{K} \right)^{\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{K}{L} \right)^{\gamma}}$$

1) Pitchford, J.D., Growth and the...a.a.O., S. 495.

2) Sato, K., Growth and the Elasticity of Factor Substitution: A Comment - How Plausible is Imbalanced Growth, in: The Economic Record, Vol. 39, 1963, S. 357.

Denn wird (10), d.h. $\frac{Y}{K} = (\gamma + \mu \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho})^{\frac{1}{1-\rho}}$, mit ρ potenziert, ergibt sich:

$$(21) \quad \left(\frac{Y}{K}\right)^{\rho} = \left[\gamma + \mu \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}\right]^{-1}$$

Gleichung (21), auf beiden Seiten mit γ multipliziert, hat den Ausdruck (20) für die Produktionselastizität α zur Folge.

Aus Formulierung (10) läßt sich $\alpha = \gamma \left(\frac{Y}{K}\right)^{\rho}$ herausziehen:

$$(22) \quad \frac{Y}{K} = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\rho}} \left[1 + \frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \frac{Y}{K} \left[1 + \frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} = \frac{Y}{K} \cdot \alpha^{-\frac{1}{\rho}}$$

Gleichung (22) ermöglicht es nun, die kritische Sparquote $\bar{s}$ in Abhängigkeit von den bekannten Größen n , α und $\frac{Y}{K}$ zu formulieren:

$$(23) \quad \bar{s} = \frac{n}{\frac{Y}{K} \cdot \alpha^{-\frac{1}{\rho}}} \quad 1)$$

Die Sparquote wird jetzt durch bekannte bzw. empirisch leicht festzustellende Größen determiniert. Nur die Substitutionselastizität - in (23) durch den Substitutionsparameter ρ enthalten - stellt eine unbekannte Variable dar. Ihre Variation bei Konstanz von n , α und $\frac{Y}{K}$ läßt ceteris paribus die Veränderungen des kritischen Wertes der Sparquote $\bar{s}$, hervorgerufen durch alternative Werte für ρ , erkennen. Daraus kann Aufschluß über die Plausibilität der in den Abbildungen 5 und 7 beschriebenen Fällen gewonnen werden.

Angenommen, die Substitutionselastizität ist größer als Eins. Wird $\rho = \infty$, d.h. $\rho = -1$, so ergibt sich bei $n=2\%$, $\alpha=0,5$ und $\frac{Y}{K}=0,5$ für die kritische Sparquote ein Wert von 8%. Nimmt die Substitutionselastizität gegen Eins ab, so wächst $\bar{s}$ an. Beispielsweise für $\rho=2$, d.h. $\rho = -\frac{1}{2}$, muß $\bar{s}$ einen Wert von 16% und bei $\rho=1,5$ sogar von 32% annehmen. Je näher also der Wert von ρ bei Eins liegt, um so höher wird der kritische Wert $\bar{s}$ sein. "Though the saving ratio as high as 1/3 is not an impossible target, it clearly indicates the level, which the saving ratio must exceed, if unbalanced growth is to take place"²⁾. Mit Ausnahme sehr hoher Sparquoten wird also der Fall $w_K > w_L$ und $\rho > 1$ durchaus die erstrebens-

1) Sato, K., Growth and the Elasticity...a.a.O., S. 357.

2) derselbe, S. 356.

werte Gleichgewichtslösung mit $w_Y = w_K = w_L$ erbringen.

Die Beziehungen zwischen $\bar{b}$ und $\bar{s}$ lassen sich durch Abbildung 9¹⁾ noch verdeutlichen. Je mehr sich $\bar{b}$ einem Wert von Unendlich nähert, um so geringer ist der Wert der kritischen Sparquote $\bar{s}$, der nicht überschritten werden darf. Ist die tatsächliche Sparquote gleich 8%, so genügt sie, um bei Werten für n , α und $\frac{Y}{K}$ gemäß dem Zahlenbeispiel für alle Werte von $\bar{b} > 1$ die wünschenswerten Gleichgewichtspfade zu ermöglichen. Ist die tatsächliche Sparquote größer als 8%, so besteht bei sehr hohen Werten für $\bar{b}$ die Gefahr, daß es zu der in Abbildung 5 aufgezeigten Situation kommt. Mit gegen Unendlich gehender Substitutionselastizität darf die tatsächliche Sparquote nie den Wert von $n/\frac{Y}{K}\alpha$ überschreiten. Die Grenze für die kri-

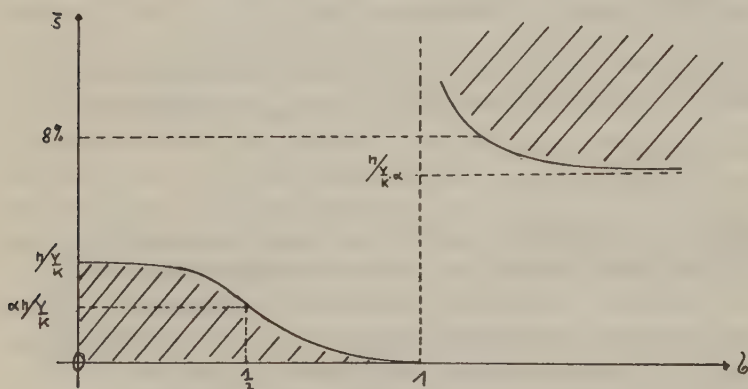


Abb. 9

tische Sparquote $\bar{s}$ nähert sich in Abbildung 9 asymptotisch diesem Wert. Ist dagegen die Substitutionselastizität geringer als Eins, so hat die die kritische Grenze beschreibende Kurve in Abbildung 9 einen Wendepunkt bei $\bar{b} = 0,5$. Bei $\bar{b} = 0$, d.h. $p = \infty$, erreicht $\bar{s}$ seinen absolut höchsten Wert von $\bar{s} = n/\frac{Y}{K}$. Wandert $\bar{b}$ gegen Eins, so nimmt $\bar{s}$ bis $\bar{b} = 0,5$ progressiv ab ($\bar{s} = n\alpha/\frac{Y}{K}$); für darüber hinausgehende Werte sinkt $\bar{s}$ nur noch degressiv. In Abbildung 9 repräsentieren somit die schraffierten Flächen jene Kombinationen von s und $\bar{b}$, die kein neoklassisches Gleichgewicht erlauben. Die Wahrscheinlichkeit eines 'ungleichgewichtigen' Wachstums wird also bei schlechten Substituten größer. Endgültige Aufschlüsse lassen sich jedoch erst durch eine Überprüfung der empirischen Werte gewinnen, die

1) Sato, K., Growth and the Elasticity...a.a.O., S. 358.

dann ein Urteil über die Plausibilität des in Abbildung 7 beschriebenen Falls zuläßt.

Eine dazu von Sato vorgenommene Untersuchung der Werte von Y/K und α bei einer Wachstumsrate der Arbeit von 0,7% erbringt für die Jahre 1900 - 1909 und 1949 - 1957 unter der Annahme von $\bar{b} = 0$ und $b = 0,6$ durchaus gleichgewichtige Werte für die Sparquote¹⁾. Die kritische Grenze von $\bar{s}$ läßt sich mit Hilfe von (23) berechnen und ergibt in Satos Überprüfung Werte von 0,022 bei $\bar{b} = 0$ und 0,0033 bei $b = 0,6$. Diese werden durch die tatsächliche Sparquote bei weitem überschritten.

Die Wahrscheinlichkeit eines neoklassischen Gleichgewichts wird auch größer, wenn man nicht wie bisher von einer konstanten, verteilungsunabhängigen Sparquote ausgeht, sondern eine proportionale, von der Einkommensverteilung mitbestimmte Sparquote $s = s_K \alpha + s_L \beta$ unterstellt (die Indices K und L kennzeichnen die Sparquote der Besitz- und der Lohneinkommensempfänger).

Der Ungleichgewichtsfall in Abbildung 5 wird damit wesentlich unwahrscheinlicher, wenn man von der Annahme ausgeht, daß die Sparquote der Besitzeinkommensempfänger die der Lohneinkommensempfänger übertrifft, da während des Wachstumsprozesses eine Umverteilung zugunsten des Kapitals einsetzt. Diese Umverteilung induziert eine Steigerung der Zuwächse zum Kapitalstock, da die gesamtwirtschaftliche Sparquote sich erhöht. In Abbildung 5 wäre das durch einen progressiven Verlauf der w_K -Linie zum Ausdruck zu bringen. Der Angleichungsprozeß wird bei einer verteilungsabhängigen Sparquote selbst zu einer Verwirklichung des neoklassischen Gleichgewichts mit $w_Y = w_K = w_L$ beitragen. Einen ähnlichen, d.h. ebenfalls die Ungleichgewichtssituation beseitigenden Effekt hat die verteilungsunabhängige Sparquote auch in dem der Abbildung 7 zugrundeliegenden Fall. Durch den Umverteilungsprozeß zugunsten der Arbeit sinkt die gesamtwirtschaftliche Sparquote, so daß fast automatisch die kritische Grenze von $\bar{s}$ unterschritten wird.

Diese Bestimmung der gleichgewichtigen Sparquote $\bar{s}$ macht deutlich, daß auch in den meisten Fällen unter der Voraussetzung einer CES-Funktion für realitätsnahe Werte das aus dem Abschnitt 2.1. bekannte neoklassische Ergebnis $w_Y = w_K = w_L$ folgt. Neu im Vergleich zum einfachsten Modell ist, daß während des Anpassungsprozesses die Einkommensverteilung einer Veränderung unterliegt. Ursache hier-

1) Sato, K., Growth and the Elasticity...a.a.O., S. 360.

für ist die Annahme einer Substitutionselastizität von ungleich Eins. Sie ist auch letztlich dafür verantwortlich, daß eben nicht in allen denkbaren Fällen die gewünschte Gleichgewichtslösung zu verwirklichen ist. An Hand von Abbildung 10¹⁾ läßt sich das abschließend noch auf eine andere Art verdeutlichen.

Stellt man die Produktionsfunktion mit Hilfe von Isoquantenschemata dar, so ergeben sich für unterschiedliche Substitutions- und Distributionsparameter verschiedenartige Isoquantenverläufe. Die Variation der Distributionsparameter - sie bestimmen die Schiefe der Kurve²⁾ - interessiert in diesem Zusammenhang weniger. Wie bisher sei angenommen, daß γ und μ konstant sind. Die Wirkung der Substitutionselastizität ist dagegen von entscheidender Bedeutung. Bei $\delta = 1$ nähern sich die Isoquanten wie gleichseitige Hyperbeln genau den Achsen des Koordinatensystems asymptotisch an³⁾.

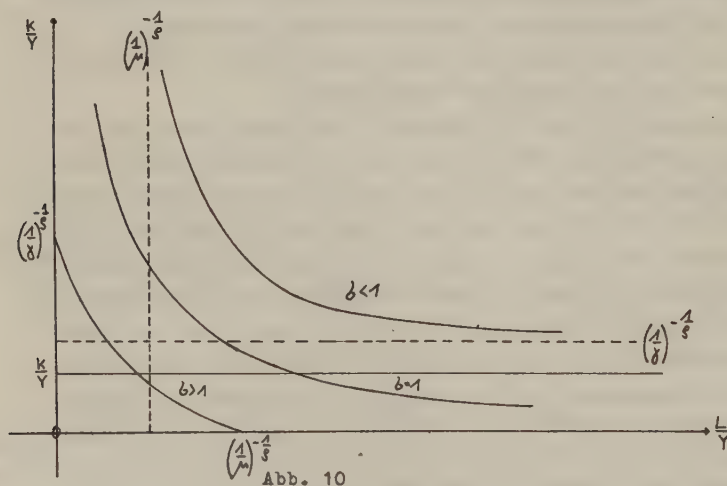


Abb. 10

tisch an³⁾. Ist dagegen $\delta < 1$, so gleicht sich ein Hyperbelzweig jenem Minimumwert an, der in (9) bereits als Grenzwert für die Kapitalproduktivität abgeleitet wurde. Mit gegen Unendlich gehender Kapitalintensität kann die Kapitalproduktivität nur bis $(\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{\delta}}$ absinken. Für eine unendlich hohe Arbeitsintensität läßt sich analog der Grenzwert der Arbeitsproduktivität als $(\frac{1}{\mu})^{\frac{1}{\delta}}$ berechnen. In Abbildung 10 finden anstelle der Produktivitäten der Kapital- bzw.

1) Pitchford, J.D., Growth and the...a.a.O., S. 498.

2) Helmstädter, E., Die Isoquanten...a.a.O., S. 182

3) derselbe, S. 185.

der Arbeitskoeffizient Verwendung, deren Grenzwerte durch $(\frac{1}{\lambda})^{-\frac{1}{\sigma}}$ bzw. $(\frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{\sigma}}$ beschrieben werden. Ist $\delta > 1$, so schneiden die Hyperbelzweige die Koordinaten und nähern sich ökonomisch nicht mehr relevanten Asymptoten¹⁾.

An Hand der Abbildung 10 wird klar, daß mit einer Substitutionselastizität von ungleich Eins nicht mehr alle Werte des Kapitalkoeffizienten (und damit der Kapitalproduktivität) zu realisieren sind. Grundlage der graphischen Darstellung der Isoquanten bildet der reziproke Wert von Gleichung (10):

$$(32) \quad \frac{K}{Y} \cdot \left[\frac{1}{\delta} - \left(\frac{\lambda}{\delta} \right) \left(\frac{L}{Y} \right)^{-\sigma} \right]^{-\frac{1}{\sigma}}$$

Für konstante Werte von Y , δ und λ lassen sich hieraus die verschiedenen Isoquanten bei alternativen Werten des Kapital-Arbeits-Einsatzverhältnisses ableiten. Für $\delta = 1$ folgt der Isoquantenverlauf mit sich den Achsen annähernden Hyperbelzweigen. Für $\delta < 1$ ergibt sich aus (32), daß mit einem unendlich hohen Arbeitskoeffizienten (d.h. einer unendlich hohen Kapitalintensität) der Kapitalkoeffizient sich seinem Grenzwert von $(\frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{\sigma}}$ angeglichen hat. Ist dagegen bei $\delta > 1$ der Arbeitskoeffizient gleich Null (d.h. die Kapitalintensität gleich Null), so hat die Kapitalproduktivität die ökonomisch relevante Obergrenze von $(\frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{\sigma}}$ erreicht, d.h. der Kapitalkoeffizient ist gleich $(\frac{1}{\delta})^{-\frac{1}{\sigma}}$.

Gilt für den neoklassischen Gleichgewichtspfad $w_K = s \frac{Y}{K} = w_L$, so muß zur Erreichung dieses Pfades in der Wirtschaft die Möglichkeit bestehen, bei konstanter Sparquote einen Kapitalkoeffizienten von $\frac{s}{n}$ zu verwirklichen. Stellt in Abbildung 10 $\frac{K}{Y}$ diesen wünschenswerten Kapitalkoeffizienten dar, so kann im Rahmen einer Substitutionselastizität von Eins dieser Wert von $\frac{n}{s}$ angenommen werden. Für $\delta \neq 1$ gilt das nur, wenn die $\frac{K}{Y}$ -Linie die Isoquante schneidet. Am Beispiel der Abbildung 10 bedeutet das, daß unter der gegebenen Datenkonstellation nur unter $\delta > 1$ ein neoklassischer Gleichgewichtspfad erreicht werden kann, während bei $\delta < 1$ im Endstadium die Wachstumsraten auseinanderfallen müssen.

1) Helmstädter, E., Die Isoquanten...a.a.O., S. 185.

2.2.7. Die Anpassungsgeschwindigkeit unter der Voraussetzung einer CES-Funktion.

Abschließend sei noch kurz auf die Frage eingegangen, wie die Verwendung einer CES-Funktion die Anpassungszeit beeinflusst. Wie bereits angedeutet, wird sich unter bestimmten Konstellationen der Anpassungsprozeß verlangsamen. Da grundsätzlich kein Unterschied zu dem in 2.1. beschriebenen Modell besteht, möge hier folgende Andeutung der Auswirkungen einer Substitutionselastizität ungleich Eins genügen.

Unter der Annahme einer CES-Funktion gilt:

$$(33) \quad L \cdot \frac{\partial x}{\partial L} = K \frac{\partial \beta}{\partial K} \cdot \alpha \beta^{\frac{1-\beta}{\beta}} \quad 1)$$

Liegt der Untersuchung eine Cobb-Douglas Funktion zugrunde, so werden sich nach Gleichung (33) in einer Ungleichgewichtssituation ($w_K \neq w_L$) die Einkommensanteile der Faktoren nicht verändern. Anders dagegen unter der Annahme von $\beta \neq 1$. Jetzt kann der Anpassungsprozeß nur in Verbindung mit einer Einkommensumverteilung stattfinden. Berücksichtigt man nur die 'realitätsnahen' Fälle der Abbildungen 6 und 8, dann wird sich mit einer Variation von β (und damit von α) die Anpassungszeit anders gestalten, als wenn β konstant bleibt. Erhöht sich β während des Annäherungsprozesses der Wachstumsraten, so verkürzt sich die Anpassungsdauer. Bringt dagegen die Anpassung eine Umverteilung zugunsten des Kapitals, so wird sich daraufhin die Anpassungszeit erhöhen²⁾. Je leichter die beiden Faktoren Arbeit und Kapital zu substituieren sind, d.h. je höher die Substitutionselastizität ist, um so länger muß die Anpassungsdauer sein, wie sich tendenziell an Hand folgender Extremfälle nachweisen läßt: Ist $\beta = 0$, d.h. die Faktoren sind limitational, so ist das System wie im Harrod-Modell instabil und jegliche Anpassung unterbleibt. Ist $\beta = \infty$, d.h. Arbeit und Kapital stellen homogene Faktoren dar, dann sind Ungleichgewichtssituationen undenkbar.

Übertrifft umgekehrt die Wachstumsrate der Arbeit die des Kapitals, so wird unter der Voraussetzung von $\beta < 1$ sich der Anpassungsprozeß mit abnehmender Produktionselastizität der Arbeit vollziehen. Hier wird folglich eine 90%-tige Anpassung der Kapitalproduktivität

1) Dickinson, H.D., A Note on Dynamic Economics, in: The Review of Economic Studies, Vol. 22, 1954-55, S. 172.

2) Sato, R., Fiscal Policy...a.a.O., S. 21.

tät an ihren Gleichgewichtswert wesentlich später zu erreichen sein als unter der Konstellation $w_L > w_K$ und $\beta > 1$, da in dieser Situation die Produktionselastizität der Arbeit ansteigt.

Die Verwendung einer CES-Funktion verändert in vielen Fällen nicht grundsätzlich die Ergebnisse des einfachsten neoklassischen Modells auf der Grundlage einer Cobb-Douglas Funktion. Allerdings muß z.T. eine empirische Überprüfung den Nachweis eines neoklassischen Wachstums bei realitätsnahen Werten liefern, da theoretisch auch Fälle abzuleiten sind, die im Endstadium nicht durch die Übereinstimmung aller Wachstumsraten charakterisiert werden. Die im einfachsten neoklassischen Modell bedeutungslose Sparquote erfährt dadurch eine gewisse Aufwertung, da ihr neben dem Einfluß auf das Einkommensniveau auch die Aufgabe der Realisierung des Gleichgewichts zukommt.

Die Ergebnisse in bezug auf Gleichgewicht und Stabilität des Wachstumsprozesses unterscheiden sich insgesamt doch recht wenig, ganz gleich ob nun die stark vereinfachende Cobb-Douglas- oder die etwas kompliziertere CES-Funktion der Untersuchung zugrundegelegt werden. Damit liegt die Vermutung nahe, daß weniger der Wert der Substitutionselastizität für das Gleichgewicht und die Stabilität verantwortlich ist als die weiteren Implikationen der Produktionsfunktion. Infolgedessen soll im folgenden versucht werden, die Existenz und Stabilität eines neoklassischen Wachstumsprozesses auf der Grundlage einer nicht-linearen, aber homogenen Funktion nachzuweisen.

2.3. Der Wachstumsprozeß auf der Grundlage einer nicht linear-homogenen Produktionsfunktion.

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels konnten auf der Grundlage einer linear-homogenen Produktionsfunktion in Verbindung mit einer konstanten Sparquote und invarianter Wachstumsrate der Arbeit gleichgewichtige Wachstumspfade nachgewiesen werden. Es erhebt sich damit die Frage, ob im Rahmen der Prämissen nicht gerade diese Annahme der Linear-Homogenität der Funktion letztlich Ursache der Existenz des Gleichgewichts und dessen Stabilität ist. Diese Frage läßt sich am besten durch die Verwendung eines anderen Funktionstyps beantworten, wobei allerdings von vornherein darauf verwiesen sei, daß es nicht zum Aufgabenkreis der Arbeit gehört, die Produktionsfunktion auf ihre Realitätsnähe hin zu untersuchen. Dennoch wird der Versuch einer sinnvollen ökonomischen Interpretation sich diesem Problem nicht vollkommen verschließen können. Die neue, in Betracht zu ziehende Funktion möge jedoch weiterhin die Forderung der Homogenität erfüllen, ohne die der für eine Wachstumsanalyse notwendige Zusammenhang zwischen Faktoreinsatz und Produktionsergebnis fehlt. Es gilt damit im folgenden zu untersuchen, ob wenigstens formal auch bei Nicht-Linearität der Produktionsfunktion eine störungsfreie Wachstumsrate des Einkommens abzuleiten ist.

2.3.1. Die Eigenschaften einer nicht linear-homogenen Produktionsfunktion.

Die in 2.1.1. in allgemeinsten Schreibweise formulierte Produktionsfunktion $Y=F(K,L)$ genügt dann der Annahme der Linearität, wenn bei proportionaler Vermehrung der Faktoren Arbeit und Kapital um einen Prozentsatz p auch das durch ihren Einsatz hervorgerufene Produktionsergebnis sich ebenfalls um p -Prozent erhöht. Der lineare Zusammenhang zwischen Faktormengenvariation und Veränderung des Einkommens geht dann verloren, wenn das Einkommen sich um eine Potenz der Erhöhung von ungleich Eins steigert. Die unter- oder überproportionale Zunahme des Produktionsergebnisses kennzeichnet den Fall der 'decreasing' oder 'increasing returns to scale' (ab-

nehmende oder ansteigende Skalenerträge). Eine derartige Zusammenhänge implizierende Funktion kann ohne weiteres abnehmende Grenzerträge der Arbeit bzw. des Kapitals widerspiegeln, denn Nicht-Linearität der Funktion bedeutet nur eine über- oder unterproportionale Veränderung des Einkommens bei p r o p o r t i o n a l e r Faktorvermehrung. Wird dagegen nur einer der Faktoren vermehrt, so wird das Einkommen auch dann unterproportional ansteigen, so lange die partielle Produktionselastizität der Faktoren nicht größer als Eins ist. Der Unterschied zur linearen Beziehung ist eben nur quantitativer Art. Analog zu (2) und (3) in 2.1.1. gilt folglich weiterhin:

$$(1) \quad \frac{\partial Y}{\partial K} > 0; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial Y}{\partial L} > 0; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0.$$

Aus dieser Sicht der Zusammenhänge folgt für die Cobb-Douglas Funktion, daß bei Nicht-Linearität der Funktion die Summe der Exponenten immer ungleich Eins sein muß. Beträgt beispielsweise die Summe aus α und β 0,7, so wird das Einkommen bei einer 10%-tigen Erhöhung des Kapital- und Arbeitseinsatzes nur um 7% ansteigen. Dies ist der Fall der 'decreasing returns to scale'. Wenn dagegen die Summe der Produktionselastizitäten größer als Eins ist, wird das Einkommen überproportional zur Faktoreinsatzvermehrung zunehmen, es liegt der Fall der 'increasing returns to scale' vor. Aber auch dann können nach (1) und (2) die partiellen Produktionselastizitäten kleiner als Eins sein, d.h. die Produktionsfunktion impliziert weiterhin abnehmende Grenzerträge.

Die neue zugrundezulegende Produktionsfunktion unterscheidet sich damit äußerlich nicht von der bisherigen Cobb-Douglas Funktion:

$$(3) \quad Y = K^{\alpha} L^{\beta}.$$

Sie gewinnt jedoch durch die Annahme $\alpha + \beta \neq 1$ einen wesentlich anderen ökonomischen Gehalt.

Beide Möglichkeiten einer nicht linear-homogenen Funktion bewirken keine Veränderung der formalen Ableitung der tatsächlichen

Wachstumsrate des Einkommens¹⁾, die sich weiterhin durch totale Differentiation aus (3) ergibt.

Gilt die formale Bestimmung der tatsächlichen Wachstumsrate aus (3) unabhängig von der Summe der Produktionselastizitäten, so läßt sich die Untersuchung ganz allgemein für eine nicht lineare Produktionsfunktion vornehmen. Die Berücksichtigung von ab- oder zunehmenden Skalenerträgen wird damit erst im Rahmen einer ökonomischen Interpretation bedeutsam.

Vereinfachend sei wiederum angenommen, daß durch eine Substitutionselastizität von Eins die partiellen Produktionselastizitäten konstant bleiben²⁾.

2.3.2. Tatsächliche und gleichgewichtige Wachstumsrate bei nicht linearer Produktionsfunktion.

Wird die Abhängigkeit des Einkommens vom Faktoreinsatz durch Gleichung (3) beschrieben, so folgt hieraus durch totale Differentiation und Division durch die Ursprungsgleichung unabhängig von der Art der Skalenerträge die bereits aus 2.1.2. bekannte Formulierung der tatsächlichen Wachstumsrate des Einkommens:

$$(4) \quad w_Y = \alpha w_K + \beta w_L$$

Da die Sparquote verteilungsunabhängig und ebenso wie die Wachstumsrate der Arbeit $w_L = n$ in der Zeit konstant ist, folgt aus (4):

$$(5) \quad w_Y = \alpha s \frac{Y}{K} + \beta n$$

In Verbindung mit der invarianten Sparquote und den konstanten Produktionselastizitäten kann die Wachstumsrate des Einkommens nur störungsfrei sein, wenn wiederum die Kapitalproduktivität unverändert bleibt. Das aber erfordert die Übereinstimmung von w_Y und w_K . Analog zu Bedingung (14) in 2.1.2. läßt sich die gleichgewichtige Wachstumsrate mit Hilfe von $z = w_Y = w_K$ finden:

$$z = z\alpha + \beta n$$

$$(6) \quad z = w_Y = w_K = \frac{\beta}{1-\alpha} n$$

1) Beckmann, M., Einkommensverteilung und Wachstum bei nicht-neutralem technischen Fortschritt, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd.178, 1965, S. 82

2) Bombach, G., Wirtschaftswachstum...a.a.O., S. 774.

Für den Fall einer nicht linearen Produktionsfunktion besteht folglich nach (6) immer dann die Möglichkeit eines gleichgewichtigen Wachstums, wenn die exogen vorgegebene Wachstumsrate der Arbeit in einem bestimmten, durch die Produktionselastizitäten determinierten Verhältnis zur Wachstumsrate des Einkommens steht. Das geschieht unabhängig davon, ob 'increasing' oder 'decreasing returns to scale' vorliegen. Entscheidend ist nur die Verwirklichung der Bedingung (6). Der Sonderfall mit $\alpha + \beta = 1$ ergibt die aus 2.1. bekannte Gleichgewichtsrates mit $w_Y = w_K = n$. Jede andere Konstellation muß dagegen zu divergierenden Wachstumsraten führen.

Wenn Bedingung (6) erfüllt ist, so muß auch in (5) eine konstante, d.h. gleichgewichtige Kapitalproduktivität erreicht sein. Die Veränderung der Kapitalproduktivität bzw. die darauf Einfluß nehmenden Größen sind durch die Wachstumsrate von $\frac{Y}{K}$, d.h. durch die Differenz der Wachstumsraten von Einkommen und Kapital, zu ermitteln. Durch Subtraktion von w_K auf beiden Seiten von Gleichung (4) ergibt sich:

$$(7) \quad w_Y - w_K = w_K (\alpha - 1) + \beta n.$$

Je nach Höhe der Wachstumsraten von Arbeit und Kapital in Verbindung mit den partiellen Produktionselastizitäten (und somit in Verbindung mit ab- oder zunehmenden Skalenerträgen) wird sich die Kapitalproduktivität verändern. Ihren gleichgewichtigen Wert erreicht sie, wenn die Wachstumsraten von Kapital und Einkommen übereinstimmen:

$$(8) \quad \begin{aligned} w_K (1 - \alpha) &= \beta n \\ \left(\frac{Y}{K}\right)^* &= \frac{\beta n}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

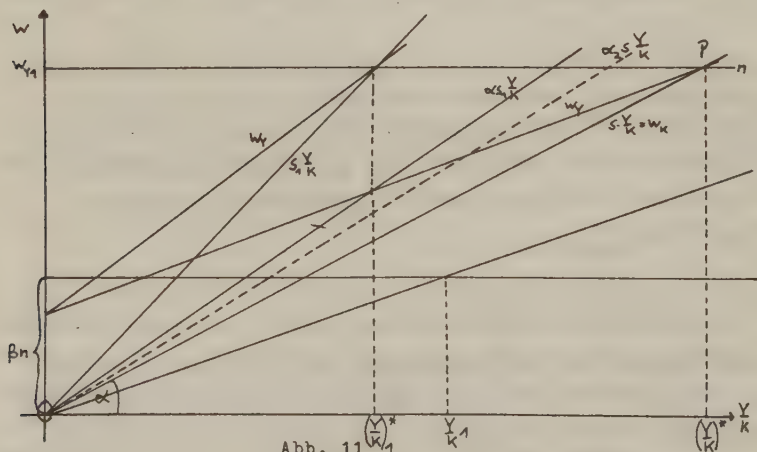
Diese gleichgewichtige Kapitalproduktivität $\left(\frac{Y}{K}\right)^*$ hängt in Analogie zum Abschnitt 2.1. von dem Quotienten aus Arbeitswachstum und Sparquote ab. Zusätzlich zeigt sich der mitbestimmende Einfluß der Nicht-Linearität an dem Verhältnis $\frac{\beta}{1 - \alpha}$.

Die Ergebnisse (3) bis (8) bestätigen formal die Existenz eines Gleichgewichtspfades auch unter Zugrundelegung einer nicht linearen Produktionsfunktion. Der Weg zu diesem Gleichgewicht kann nur mit Hilfe der Trennung der zwei möglichen Fälle, d.h. ab- oder

zunehmenden Skalenerträgen, erklärt werden.

2.3.3. Gleichgewichtiges Wachstum und Stabilität unter der Annahme von 'increasing returns to scale'.

Unterstellt Produktionsfunktion (3) zunehmende Skalenerträge, so muß die Summe der Produktionselastizitäten stets den Wert Eins übertreffen. Eine proportionale Vermehrung der nach (3) das Produktionsergebnis bestimmenden Faktoren äußert sich immer in einer überproportionalen Erhöhung des Einkommens. Eine konstante Sparquote s wird aber während des Wachstumsprozesses diese Übereinstimmung von w_K und w_L nur kurzfristig bestehen lassen können, denn durch das überproportionale Einkommenswachstum ergibt sich sofort eine Tendenz, w_K ebenfalls zu erhöhen. Hieraus erklärt sich, daß nach Bedingung (6) im Rahmen der Prämissen die konstante Wachstumsrate des Einkommens nur zu realisieren ist, wenn die Konstellation $w_Y = w_K > w_L$ besteht. Legt man zur graphischen Darstellung dieses Gleichgewichtszustandes Abbildung 1 aus 2.1.2. zugrunde, so muß bei einer Kapitalproduktivität von $\frac{n\beta}{1-\alpha}$ diese Situation verwirklicht sein. In Abbildung 11 ist dieser Gleichgewichtspunkt zu



finden, indem die Übereinstimmung von w_Y und w_K konstruiert wird. Da nach (4) bzw. (5) die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens sich als Summe der mit den Produktionselastizitäten gewichteten

Wachstumsraten der Faktoren ergibt, ermittelt sich die Höhe von w_Y durch Vertikaladdition der Wachstumspfade von Arbeit und Kapital bei alternativen Werten der Kapitalproduktivität. Da $w_L = n$ weiterhin von $\frac{Y}{K}$ unabhängig ist, w_K für einen positiven Wert von s zunimmt, ergeben sich dieselben Kurvenverläufe in Abbildung 11 wie in Abbildung 1. Die Annahme der Nicht-Linearität wirkt sich nur in den Verläufen der den Beitrag des Faktorwachstums zum Einkommenswachstum kennzeichnenden Kurven aus. Bei steigenden Skalenerträgen müssen die Produktionselastizitäten absolut höhere Werte (wenn auch kleiner als Eins) aufweisen, so daß die Beitragslinien αw_K und βn näher an ihren entsprechenden Wachstumslinien liegen. Der Verlauf von w_Y bei verschiedenen Werten der Kapitalproduktivität resultiert wieder aus der Addition von $\alpha s \frac{Y}{K}$ und βn . Bei einer Kapitalproduktivität von Null bestimmt allein der Faktor Arbeit und dessen Produktionselastizität β die Höhe der tatsächlichen Wachstumsrate des Einkommens. Positive Werte der Kapitalproduktivität implizieren dagegen auch eine Erhöhung des Kapitalstocks, welche sich wiederum in einem höheren Wert von w_Y niederschlägt. Die durch (6) abgeleitete Gleichgewichtsbedingung ist in Abbildung 11 im Punkt P verwirklicht, denn hier stimmen w_Y und w_K überein. Die auf der Abszisse abgetragene Kapitalproduktivität hat den in (8) formulierten Gleichgewichtswert erreicht. Der Winkel $\text{tg } \alpha$ beschreibt einmal das Steigungsmaß der w_K -Kurve, d.h. die Sparquote s , zum anderen ist $\text{tg } \alpha$ aber auch mit dem Verhältnis von $\alpha s \frac{Y}{K} + \beta n$ zu $\frac{Y}{K}$ identisch. In dieser Situation muß folglich auch s diesem Verhältnis gleich sein: $s = (\alpha s \frac{Y}{K} + \beta n) / \frac{Y}{K}$. Aufgelöst nach der Kapitalproduktivität ergibt sich deren Gleichgewichtswert $(\frac{Y}{K})^* = \frac{n\beta}{1-\alpha} / s$. Die bei einer Produktionsfunktion (3) in Verbindung mit einer konstanten Wachstumsrate der Arbeit n und der bestehenden Sparquote s zu verwirklichende störungsfreie Wachstumsrate beträgt w_{Y_1} . Diese übertrifft die der Arbeit, wie in Abbildung 11 deutlich wird und wie es Bedingung (6) verlangt. Ebenso wie im Spezialfall der 'constant returns to scale' ist dieser Gleichgewichtszustand stabil und wird in einem mit t gegen Unendlich gehenden Anpassungsprozeß von jeder Ausgangssituation erreicht. Der Nachweis läßt sich analog zu den Formulierungen (16) bis (35) in 2.1.3. mit Hilfe der Differentialgleichung

$$(9) \quad \frac{dK}{dt} = s Y_0 \cdot \left(\frac{K_t}{K_0} \right)^\alpha \cdot e^{n\beta t}$$

führen, denn wird (9) durch Integration nach der Methode der Trennung der Variablen aufgelöst, läßt sich der Zeitpfad der Entwicklung des Kapitalstocks (10) ermitteln:

$$(10) \quad K_t = K_0 \left(\frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{Y_0}{K_0}}{e^{n\beta t}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n\beta t}{1-\alpha}}$$

Für t gegen Unendlich bestimmt sich die Wachstumsrate des Kapitals, die natürlich mit dem in (6) abgeleiteten Gleichgewichtswert übereinstimmen muß:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_t = K_0 \cdot B^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n\beta t}{1-\alpha}} \quad B = \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{Y_0}{K_0}$$

$$(11) \quad \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K} = \frac{\beta}{1-\alpha} \cdot n$$

Unabhängig von der Ausgangssituation Y_0/K_0 wird also der Gleichgewichtspfad der Kapitalstockentwicklung erreicht. Das System ist stabil.

Ebenso wie in Gleichung (29) in 2.1.3. läßt sich mit Hilfe von (10) und der Ausgangsgleichung $Y_t = L_0^\beta e^{n\beta t} K_t^\alpha$ auch der Zeitpfad der Einkommensentwicklung ableiten:

$$(12) \quad Y_t = Y_0 \left(\frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{1-\alpha}{\beta} \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{Y_0}{K_0}}{e^{n\beta t}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{n\beta t}{1-\alpha}}$$

Durch die Grenzbetrachtung für t gegen Unendlich und Differentiation nach t folgt hieraus wiederum der aus Bedingung(6) bekannte gleichgewichtige Wert des Einkommenswachstums von:

$$(13) \quad \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{Y} = \frac{\beta}{1-\alpha} \cdot n$$

Die Annahme der 'increasing returns to scale' hindert also nicht daran, mit gegen Unendlich gehender Anpassungszeit den durch α , β und n festgelegten Gleichgewichtswert zu verwirklichen. Unabhängig von welcher Ausgangslage auch immer, Kapitalstock und Einkommen konvergieren zu ihrer gleichgewichtigen Wachstumsrate.

Besteht dagegen bereits in der Ausgangssituation eine gleichgewichtige Konstellation, so vollzieht sich ein störungsfreies Wachstum ohne Anpassungsprozeß. Die dazu notwendige Kapitalproduktivität ist durch Division von (12) durch (10) in Verbindung mit der Grenzbetrachtung für $t \rightarrow \infty$ zu berechnen:

$$(14) \quad \frac{Y_t}{K_t} = \frac{Y_0}{K_0} \left(\frac{1-\alpha}{\beta} \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0} + \frac{1 - \frac{1-\alpha}{\beta} \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0}}{e^{n/\beta t}} \right)^{-1}$$

$$(15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y_t}{K_t} = \frac{Y_0}{K_0} \left(\frac{1-\alpha}{\beta} \frac{s}{n} \frac{Y_0}{K_0} \right)^{-1}$$

$$(16) \quad \left(\frac{Y}{K} \right)^* = \frac{\beta n}{1-\alpha} / s.$$

Diese für eine störungsfreie Entwicklung des Einkommens notwendige Kapitalproduktivität garantiert einen von Anfang an gleichgewichtigen Wachstumspfad, ohne daß es zu dem nach (10) und (12) beschriebenen Anpassungsprozeß kommt. Die gleichgewichtige Entwicklung wird offensichtlich, wenn $\left(\frac{Y}{K} \right)^*$ in die Zeitpfade von Kapital und Einkommen eingesetzt wird:

$$(17) \quad K_t = K_0 \cdot e^{\frac{n\beta t}{1-\alpha}}$$

$$(18) \quad Y_t = Y_0 \cdot e^{\frac{n\beta t}{1-\alpha}}$$

Von einem Anfangswert K_0 bzw. Y_0 wachsen Kapitalstock und Einkommen in alle Unendlichkeit mit der konstanten Rate $\frac{\beta}{1-\alpha} n$.

Es besteht also auch unter der Voraussetzung einer nicht linearen Produktionsfunktion die systemimmanente Tendenz zum Gleichgewichtspfad. Die eigentliche Ursache dieser Stabilität ist die Annahme der sinkenden Grenzerträge, wie sie durch (1) und (2) formuliert ist. Eine partielle Faktorvermehrung bzw. ein überproportionaler Faktoreinsatz bewirkt ebenso wie in den vorangegangenen Abschnitten eine nur unterproportionale Einkommenserhöhung, gemessen am Zuwachs des Faktoreinsatzes. Der durch die Nicht-Linearität hervorgerufene quantitative Unterschied des (unterproportionalen) Einkommenszuwachses kommt darin zum Ausdruck, daß die gleichgewichtige Wachstumsrate die der Arbeit übersteigt. Das wird deutlich, wenn die Gleichgewichtssituation bei 'constant returns to scale' als Ausgangspunkt des Wachstumsprozesses bei ansteigenden Skalenerträgen angesehen wird. Die Annahme von $\alpha + \beta > 1$ impliziert

eine zum Faktorwachstum überproportionale Einkommenserhöhung, so daß bei endogener Bestimmung von w_K durch $s \frac{Y}{K}$ kein Gleichgewichtszustand herrschen kann. Übertrifft nämlich w_Y den Zuwachs zum Kapitalstock, so erhöht sich die tatsächliche Kapitalproduktivität über ihren augenblicklichen Wert hinaus. Das schlägt sich in einer höheren Wachstumsrate des Kapitals nieder, die ihrerseits aber auch die Wachstumsrate des Einkommens ansteigen läßt. Da jedoch die Zunahme von w_K auch bei Nicht-Linearität die Wachstumsrate des Einkommens gemäß Annahme (1) nur unterproportional erhöht, vermindert sich die absolut ansteigende Kapitalproduktivität relativ. Anders ausgedrückt: Y/K steigt degressiv an, die Zuwachsraten werden in der Zeit immer geringer. Da $\alpha < 1$ ist, werden ständig abnehmende Grenzerträge des Kapitals auftreten, so daß sich Y/K nur degressiv entwickeln kann. Diese abnehmenden Grenzerträge stellen eigentlich den die Stabilität des Systems gewährleisten den Faktor dar. Die Kapitalproduktivität konvergiert zu ihrem Gleichgewichtswert $(\frac{Y}{K})^*$, die Wachstumsraten von Einkommen und Kapital nähern sich einander immer mehr an. In Abbildung 11 besteht in der Ausgangssituation mit $w_K = n$ eine Kapitalproduktivität von $\frac{Y}{K} 1$. Diese wächst durch den Überschuß von w_Y über w_K an, so daß nach unendlicher Anpassungszeit $(\frac{Y}{K})^*$ erreicht wird. Da $\alpha < 1$ ist, muß die Steigung der Wachstumslinie w_Y immer kleiner sein als die der w_K -Linie, so daß die Annäherung an $(\frac{Y}{K})^*$ auch von jeder anderen Ausgangssituation erfolgen muß.

Analog zum neoklassischen Modell bei 'constant returns to scale' besitzt auch hier die Sparquote keinen Einfluß auf die Höhe der Wachstumsrate, wie die Gleichungen (6) bzw. (18) verdeutlichen. So lange die Produktionselastizitäten konstant sind, werden Veränderungen von s weiterhin durch die Kapitalproduktivität derart kompensiert, daß die durch α , β und n festgelegte Wachstumsrate erhalten bleibt. Erhöht sich beispielsweise s in Abbildung 11 auf s_1 , so sinkt die Kapitalproduktivität auf ihren neuen Gleichgewichtswert $(\frac{Y}{K})_1^*$, ab, w_Y bleibt dagegen nach vollzogener Anpassung bei der gleichen Rate. Wiederum sind die bei s_1 , d.h. zu 'hoher' Wachstumsrate des Kapitals sinkenden Grenzerträge die Ursache der Abnahme der Kapitalproduktivität. Die notwendige Bedingung für die Stabilität des Systems ist folglich eine Produktionselastizität des Kapitals von kleiner als Eins. Ein Blick auf Abbildung 11

macht diese Zusammenhänge deutlich. Da die Entwicklung der tatsächlichen Wachstumsrate des Einkommens bei alternativen Werten der Kapitalproduktivität sich additiv aus $\alpha \frac{Y}{K}$ und βn zusammensetzt, jedoch nur α Einfluß auf die zur Erreichung von Gleichgewichtszuständen notwendige Steigung der αw_K -Linie ausübt, ist als Stabilitätskriterium nur der Wert der Produktionselastizität des Kapitals entscheidend. Die kritische Grenze liegt bei Eins, wie auch die Gleichgewichtswerte von $(\frac{Y}{K})^*$ in (8) und z in (6) anzeigen. Höhere Werte von α als Eins ergeben negative und damit ökonomisch irrelevante Werte.

Die ökonomische Erklärung ist verhältnismäßig einfach, wenn man sich der Prämissen des Modells erinnert. Da sowohl α und β als auch n exogen bestimmt und in der Zeit konstant sind, können Anpassungen nur bei Existenz abnehmender Grenzerträge des endogen determinierten Kapitalwachstums verwirklicht werden. Übertrifft jedoch α die kritische Grenze von Eins (beispielsweise α_2 in Abbildung 11), setzt sich die Veränderung der Wachstumsrate des Kapitals aus zwei Effekten zusammen: Einmal wird jede proportionale Vermehrung des Faktoreinsatzes das Einkommen überproportional erhöhen, und dadurch wird w_K bei konstanter Sparquote zunehmen, zum anderen birgt die Steigerung der Wachstumsrate des Kapitals selbst einen Impuls in sich, wegen $\alpha > 1$ zur überproportionalen Erhöhung von w_Y beizutragen. Folglich werden sich w_Y und w_K in gegenseitigem Wechselspiel immer weiter auseinandertreiben.

2.3.4. Gleichgewicht und Stabilität des Wachstums unter der Annahme von 'decreasing returns to scale'.

Grundsätzlich können schon wegen der formal gleichen Ableitung die Ergebnisse bei steigenden Skalenerträgen auch für den Fall sinkender Niveaugrenzprodukte übernommen werden. Das bedeutet, daß sich auch jetzt die Existenz eines Gleichgewichts und dessen Stabilität nachweisen läßt. Der Unterschied ist nicht prinzipieller Art, sondern eher quantitativer Natur in dem Sinne, daß jetzt die gleichgewichtige Wachstumsrate des Einkommens stets geringer ist als die Wachstumsrate der Arbeit. Das hat logischerweise bei vergleichbaren Werten von s und n eine geringere gleichgewichtige Kapitalproduktivität zur Folge. Abbildung 12 trägt den 'decreasing

returns to scale' dadurch Rechnung, daß bei gleichen w_K und n -Linien wie in Abbildung 11 die den Beitrag zum Einkommenswachstum kennzeichnenden Kurven $\alpha s \frac{Y}{K}$ und βn näher in Richtung Abszisse verschoben liegen als in Abbildung 11. Die ungleichgewichtige Situation bei $\frac{Y}{K} 1$, die durch proportionales Faktorwachstum charakterisiert wird, kann deshalb nur kurzfristig erhalten bleiben. Da wegen $\alpha + \beta < 1$ das Einkommen sich nur unterproportional erhöht, wird bei konstanter Sparquote die Wachstumsrate des Kapitals sinken. Wegen der geringen Produktionselastizität des Kapitals nimmt daraufhin die Wachstumsrate des Einkommens um weniger ab, als auf-

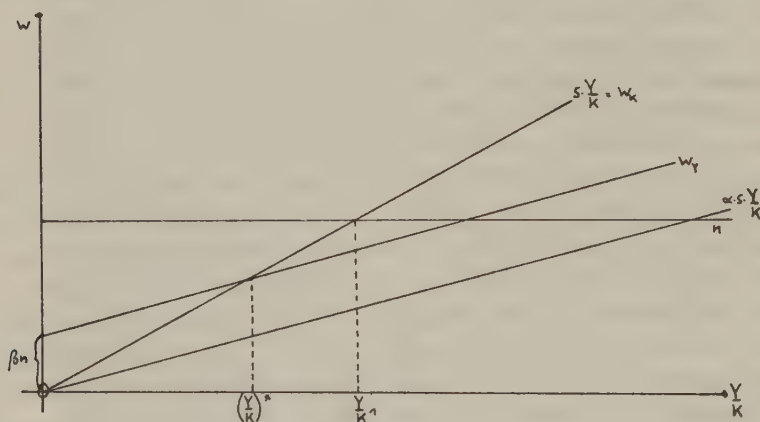


Abb. 12

grund der 'decreasing returns to scale' zu erwarten ist. Das bringt auch die wesentlich geringere Steigung der w_Y -Linie, gemessen an der w_K -Linie, zum Ausdruck. Die Kapitalproduktivität erfährt infolgedessen eine verlangsamte Abnahme. Damit sinkt auch die Wachstumsrate des Kapitals in kleinerem Maße und die Kapitalproduktivität konvergiert degressiv abnehmend zu ihrem Gleichgewichtswert, den sie vollständig nach einer unendlich langen Anpassungszeit erreicht. Bei $(\frac{Y}{K})^*$ haben sich dann w_Y und w_K wiederum vollkommen angeglichen und das System entwickelt sich in der durch (6) determinierten Rate $\frac{\beta}{1-\alpha} n$. Ebenso wie in den anderen Fällen mit konstanten Produktionselastizitäten bleibt auch jetzt die Sparquote ohne Einfluß auf die Höhe

der Wachstumsrate. Ein höheres s wird durch eine entsprechend geringere Kapitalproduktivität kompensiert.

2.3.5. Die Beurteilung der nicht linear-homogenen Produktionsfunktion für das neoklassische Wachstumsmodell.

Die vorangegangenen Überlegungen haben bewiesen, daß unter der Voraussetzung einer konstanten Wachstumsrate der Arbeit und einer invarianten Sparquote auch bei Verwendung einer nicht linearen Produktionsfunktion ein stabiles Gleichgewichtswachstum realisiert wird. Gleichzeitig sind gewisse Grenzen abgesteckt worden, die vielleicht einen Ansatzpunkt für ein besseres Verständnis der nicht linearen Produktionsfunktion liefern. So lange α und β konstant sind und so lange die Produktionselastizität des Kapitals kleiner als Eins ist, wird formal immer eine konstante Wachstumsrate im Rahmen des Modells abzuleiten sein. Das endogen bestimmte Wachstum des Kapitalstocks in Verbindung mit den abnehmenden Grenzerträgen des Kapitals ist der eigentliche, die Stabilität begründende Faktor. Aus dieser Sicht ist auch das bei Nicht-Linearität auftretende Auseinanderfallen von w_K und w_L zu verstehen. Unter der Annahme von 'increasing returns to scale' vollzieht sich ein gleichgewichtiges Wachstum mit einer ständigen Erhöhung der Kapitalintensität, da nach Bedingung (6) die Wachstumsrate des Kapitals auf dem Gleichgewichtspfad die Arbeit überschreitet. Dadurch müßten sich abnehmende Grenzerträge des Kapitals bemerkbar machen, die offensichtlich jedoch nicht zum Zuge kommen, da ansonsten keine konstante Wachstumsrate des Einkommens möglich wäre. Vorstellbar ist eine derartige Situation nur dadurch, daß die abnehmenden Grenzerträge des stärker wachsenden Faktors Kapital irgendwie durch eine nicht explizit zu Tage tretende Erhöhung der Arbeitseffizienz kompensiert werden. Dazu ist eine Art steigenden technischen Wissens notwendig, welches die Unternehmer veranlaßt, immer kapitalintensivere Produktionsmethoden einzuschlagen. Dieser technische Fortschritt kann eventuell auch als Hintergrund der Produktionselastizitäten von insgesamt größer als Eins gedeutet werden. Die vorgeblich nicht lineare Funktion trifft damit der Vorwurf, nicht alle Variablen in Betracht gezogen zu haben, die tatsächlich zum Einkommenswachstum beitragen. Es scheint daher

besser zu sein, bei zukünftigen Überlegungen den technischen Fortschritt in die Produktionsfunktion als selbständige Variable mitaufzunehmen, zumal dann der an sich logischere lineare Zusammenhang zwischen Faktoreinsatz und Produktionsergebnis erhalten bleiben kann. Die ökonomische Relevanz von ansteigenden Skalenerträgen muß stark bezweifelt werden. Ihre empirische Verifikation ist höchstwahrscheinlich auf eine unvollständige Produktionsfunktion zurückzuführen. Im weiteren Ablauf der Untersuchung ist es daher notwendig, die bisherigen Ergebnisse an Hand einer Produktionsfunktion zu überprüfen, die explizit den Faktor technisches Wissen miteinschließt. Die Ergebnisse unter der Annahme von 'increasing returns to scale' deuten jedoch an, daß gewisse Schwierigkeiten im Hinblick auf die Art des technischen Fortschritts zu erwarten sind, da beispielsweise eine sich über alle Faktoren gleichmäßig ausbreitende Effizienzsteigerung mit der Konzeption $w_Y = w_K = w_L$ nicht vereinbar scheint. Die Berücksichtigung des technischen Fortschritts muß zwangsläufig zu einem Gleichgewichtspfad mit divergierenden Wachstumsraten führen.

Auch die Annahme der 'decreasing returns to scale' läßt eine nicht vollständige Erfassung aller zum Output beitragenden Faktoren befürchten. Die durch die Konstellation $w_Y = w_K < w_L$ hervorgerufene ständige Erhöhung der Arbeitsintensität muß sinkende Grenzerträge der Arbeit hervorrufen, die durch das Kapitalwachstum im Gleichgewicht allein nicht kompensiert werden können. Beispielsweise wäre es jedoch möglich, daß ein in der Funktion erfaßter Faktor Boden mit der Produktionselastizität γ diese Aufgabe übernimmt, wenn sich $\alpha + \beta + \gamma$ zu Eins ergänzen¹⁾. Da in einem solchen Wachstumsmodell unter der Voraussetzung einer konstanten Wachstumsrate der Arbeit ständig sinkende Lohnsätze auftreten, scheint es besser, von der Prämisse $w_L = n$ abzugehen und den Fall sinkender Skalenerträge eher mit einer Art Ricardianischen Lohntheorie zu verbinden, die eine Abhängigkeit zwischen Arbeitswachstum und Lohnhöhe herstellt²⁾. Diese endogene Behandlung des Arbeitswachstums fällt jedoch aus dem Rahmen der bisher grundlegenden Prämissen und soll deshalb auch im folgenden nicht berücksichtigt werden. Auch aus der Mit-

1) Swan, T.W., Economic Growth...a.a.O., S. 340

2) Beckmann, M., Wirtschaftliches Wachstum bei abnehmenden Skalenertrag, in: Theorien des einzelwirtschaftlichen und gesamtwirtschaftlichen Wachstums, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 34, Berlin 1965, S. 99 ff.

Niehans, J., Economic Growth with Two Endogenous Factors, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 77, 1963 S. 349 ff.

einbeziehung des technischen Wissens kann der Fortfall einer Untersuchung der 'decreasing returns to scale' begründet werden, denn ein wachsendes technisches Wissen kann abnehmende Skalenerträge derart kompensieren, daß die bisherigen Ergebnisse in 2.1. und 2.2. bestätigt werden¹⁾.

Wenn die nicht linear-homogene Produktionsfunktion wegen ihrer ökonomischen Irrelevanz in Zukunft keine Verwendung mehr finden soll, so ist sie doch durchaus geeignet, wesentliche Implikationen für die Stabilität des neoklassischen Wachstumsprozesses aufzudecken. Darüber hinaus läßt sie Tendenzen erkennen, die auch bei der expliziten Berücksichtigung des technischen Fortschritts richtungsweisend sind.

1) Beckmann, M., Wirtschaftliches Wachstum...a.a.O., S. 105.

3. Der Wachstumsprozeß unter der Berücksichtigung steigenden technischen Wissens.

Während in den bisherigen drei Abschnitten stillschweigend von einem konstanten Niveau des technischen Wissens ausgegangen wurde und vor allem die Produktionsfunktion selbst einer genauen Analyse unterzogen wurde, verschiebt sich jetzt die Betrachtungsweise derart, daß der technische Fortschritt, d.h. seine Art, Abhängigkeit, Verbreitungsform und sein Einbau in die Produktionsfunktion in den Vordergrund der Analyse rückt. Es wird sich zeigen, daß neoklassische Gleichgewichtspfade nur unter ganz besonderen Voraussetzungen zu verwirklichen sind, die entweder eine bestimmte Natur der technischen Entwicklung verlangen oder aber wiederum nur bei zugrundegelegter Cobb-Douglas Funktion erfüllt sind. Als allgemeinsten Ansatzpunkt läßt sich das in 2.1. behandelte Modell verwenden, welches um den technischen Fortschritt erweitert, als Grundlage und Vergleichsmaßstab für zukünftige Überlegungen dienen mag.

3.1. Die Erweiterung des neoklassischen Modells mit zwei Faktoren um in der Zeit konstant wachsendes technisches Wissen.

3. 1.1. Grundlegende Bemerkungen.

Bisher galt eine Erhöhung des Einkommens nur als möglich, wenn Kapital- und/oder Arbeitseinsatz ebenfalls zunahm. Jedoch ist selbst bei konstanten Faktorbeständen eine Steigerung des Produktionsergebnisses denkbar, wenn beispielsweise rationellere Produktionsmethoden Anwendung finden. Die Ursache der daraus erwachsenden Einkommenserhöhung schreibt man einem Faktor 'technischer Fortschritt' zu, dessen Rate sich durch die Zunahme des Outputs bei konstantem Einsatz der übrigen Faktoren messen läßt¹⁾. Technischer Fortschritt bezeichnet damit einen "Sammelbegriff jener Faktoren, die Einfluß auf den Gesamtertrag haben und sich nicht unter Arbeit und Realkapital subsumieren lassen"²⁾. Jeder Zuwachs an technischem Wissen äußert sich als "a shorthand ex-

1) Meade, J.E., A Neo-Classical...a.a.O., S. 19.

2) Bombach, G., Die verschiedenen Ansätze der Verteilungstheorie, in: Einkommensverteilung und technischer Fortschritt, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 17, Berlin 1959, S. 120.

pression for any kind of shift in the production function"¹⁾. Diese Definition ermöglicht theoretisch eine scharfe Trennung zwischen Substitutions- und Fortschrittseffekt, d.h. Bewegung entlang einer gegebenen Produktionsfunktion und Verschiebung derselben.

Um die Betrachtung vorerst ganz auf Zusammenhänge zwischen Wachstum und Fortschritt abzustellen, wird von jeder funktionalen Beziehung zwischen Faktoreinsatz und Fortschrittsrate abgesehen. Das wachsende technische Wissen wird ähnlich dem Wachstum der Erwerbsbevölkerung von nicht im Modelle enthaltenen Faktoren abhängig gemacht. Der wie Manna vom Himmel²⁾ fallende technische Fortschritt ist autonom.

Aus Vereinfachungsgründen sei weiter angenommen, daß die Produktivitätserhöhung sich nicht nur in den neu in den Produktionsprozeß aufgenommenen Faktoren verkörpert, sondern daß "old and new capital equipment participate equally in technical change"³⁾. Eine Erhöhung des technischen Wissens trifft den gesamten Kapitalstock, unabhängig zu welchem Zeitpunkt die darin enthaltenen Investitionen vorgenommen wurden. Der Fortschritt ist somit 'disembodied', d.h. nicht an neue Kapitalgüter gebunden.

Als letzte Forderung erfülle der technische Fortschritt jene Bedingung, daß er auf irgendeine Weise "will...leave unchanged the balance between labour and capital, and so will permit steady growth"⁴⁾. Dieses - als Neutralität bezeichnete - Charakteristikum des technischen Fortschritts wird allerdings nur dann von Bedeutung sein, wenn die Produktionsfunktion nicht die vereinfachten Eigenschaften der Cobb-Douglas Funktion aufweist.

Dieser autonome, nicht kapitalgebundene und eventuell neutrale technische Fortschritt tritt nun neben Kapital und Arbeit als weiterer Wachstumsfaktor hinzu, so daß sich die Produktionsfunktion in allgemeiner Schreibweise zu

$$(1) \quad Y = F(K, L, A_t)$$

wandelt. Die Höhe des technischen Wissens ist vom Arbeits- und

1) Solow, R.M., Technical Change and the Aggregate Production Function, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 39, 1957, S. 312.

2) Hahn, F.H. and Matthews, R.C.O., The Theory of Economic Growth: A Survey, in: Surveys of Economic Theory, Vol.II, New York 1965, S. 58.

3) derselbe, S. 47.

4) ebenda.

Kapitaleinsatz völlig unabhängig und bestimmt sich nur durch den Zeitpunkt der Betrachtung:

$$(2) \quad A_t = A_0 \cdot e^{\lambda t}$$

Nach (2) muß der technische Fortschritt sich bis zum Zeitpunkt t von einem Anfangsniveau A_0 mit der konstanten Rate λ entwickelt haben. Wählt man $A_0=1$, so gilt für den Fortschrittseffekt die e-Funktion mit der Fortschrittsrate λ als Kennzeichen der Entwicklung des technischen Wissens. Diese Handhabung ermöglicht eine konsequente Anwendung der Cobb-Douglas Funktion für (1), wobei sich der technische Fortschritt als ein die Funktion erhöhender multiplikativer Faktor offenbart:

$$(3) \quad Y = K^\alpha L^\beta e^{\lambda t}$$

"Dadurch wird der Möglichkeit einer im Laufe der Zeit steigenden (oder eventuell fallenden) Effizienz des Produktionsprozesses Rechnung getragen"¹⁾. Die explizite Aufnahme des technischen Fortschritts in die Produktionsfunktion ermöglicht ein zum Faktorzunahme überproportionales Einkommenswachstum, obwohl die zugrundeliegende Funktion linear-homogen ist und bei einer Substitutionselastizität von Eins die Produktionselastizitäten und konstant sind. Das totale Differential von (1) bzw. (3) ergibt sich weiterhin als Summe der partiellen Ableitungen:

$$(4) \quad dY = e^{\lambda t} \left(\frac{\partial Y}{\partial L} dL + \frac{\partial Y}{\partial K} dK \right)^2,$$

so daß die Grenzproduktivitäten die im Zeitpunkt t herrschenden Faktorpreise widerspiegeln. Die Zeitvariable muß wegen des technischen Fortschritts berücksichtigt werden, da dieser sich in wachsendem Lohn und Zins ausdrückt:

$$(5) \quad \frac{\partial Y}{\partial L}(t) = l_t = l_0 \cdot e^{\lambda t}$$

$$(6) \quad \frac{\partial Y}{\partial K}(t) = r_t = r_0 \cdot e^{\lambda t}$$

1) Linbegen, J., Zur Theorie der langfristigen Wirtschaftsentwicklung, in: Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 55, 1942 I, S. 521.

2) Ferguson, C.E., The Elasticity of Substitution and the Savings Ratio in the Neoclassical Theory of Growth, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 79, 1965, S. 467.

Die Produktionselastizitäten α und β kennzeichnen damit die Einkommensanteile der Faktoren. Addieren sich beide zu Eins, so gilt das Adding-up-Theorem, nach dem sich das Einkommen voll auf Arbeit und Kapital verteilt. Auf der Basis der Produktionsfunktion (3) läßt sich analog zu 2.1.2. ein neoklassisches Modell ableiten.

3.1.2. Die Wachstumsrate und das Gleichgewicht.

Die formale Ableitung der in jedem Augenblick gültigen tatsächlichen Wachstumsrate erfährt durch die Berücksichtigung des technischen Fortschritts keine Veränderung. Da im Wachstumsprozeß Y , K und L ebenso wie der Fortschritt zeitabhängig sind, ergibt sich die Veränderung des Einkommens in der Zeit durch Differentiation von Gleichung (3) nach t :

$$(7) \quad \frac{dY}{dt} = \alpha K^{\alpha-1} L^{\beta} e^{\lambda t} \frac{dK}{dt} + \beta L^{\beta+1} K^{\alpha} e^{\lambda t} \frac{dL}{dt} + L^{\beta} K^{\alpha} \lambda e^{\lambda t}$$

Die Wachstumsrate des Einkommens ergibt sich durch Division von (7) durch die Ursprungsgleichung (3):

$$(8) \quad \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{Y} = \alpha \frac{dK}{dt} \frac{1}{K} + \beta \frac{dL}{dt} \frac{1}{L} + \lambda$$

Werden die Wachstumsraten wiederum vereinfachend durch w beschrieben, so folgt aus (8) für die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens:

$$(9) \quad w_Y = \alpha w_K + \beta w_L + \lambda \quad 1)$$

Der technische Fortschritt tritt also neben die bereits bekannten Wachstumsfaktoren und läßt um seinen Prozentsatz w_Y ansteigen. Bei vergleichbaren Werten von α , β , w_L und w_K wird die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens um λ über derjenigen liegen, die sich bei Konstanz des technischen Wissens ergibt.

Der Einbau des technischen Wissens in das Modell hat - wie schon angedeutet - zur Folge, daß auf dem Gleichgewichtspfad keine identischen Wachstumsraten mehr vorliegen können. Das läßt sich unter Verwendung der neoklassischen Prämissen $w_L = n = \text{konstant}$ und $s = \text{konstant}$ nachweisen. Unter diesen Bedingungen folgt aus (9):

1) Riese, H., Faktoreinsatz...a.a.O., S. 12.

$$(10) \quad w_Y = \alpha s \frac{Y}{K} + \beta n + \lambda.$$

Die Wachstumsrate des Einkommens wird für konstante Werte von α , β , s , n und λ nur dann störungsfrei sein können, wenn auch die Kapitalproduktivität einen konstanten Wert angenommen hat, d.h. wenn w_Y und w_K übereinstimmen. Die Bedingung des gleichgewichtigen Wachstums ist demzufolge analog den Schritten (9) bzw. (10) in 2.1.2. abzuleiten, indem jener Wert z gesucht wird, bei dem die Wachstumsraten von Kapital und Einkommen gleich sind:

$$z = \beta n + \alpha z + \lambda$$

$$(11) \quad z = n + \frac{\lambda}{\beta} = w_Y = w_K.$$

Wenn entsprechend Bedingung (11) das Einkommenswachstum eine Rate angenommen hat, die durch die Summe aus Arbeitswachstum und Quotient aus Fortschrittsrate und Produktionselastizität der Arbeit gebildet wird, hat das System seinen Gleichgewichtspfad mit $w_Y =$ konstant verwirklicht, da diese Wachstumsrate im Rahmen der Annahmen eine ebenso hohe Wachstumsrate des Kapitals garantiert. Unter diesen Voraussetzungen hat die Kapitalproduktivität ihren Gleichgewichtswert $\left(\frac{Y}{K}\right)^*$ erreicht, denn aus (9) folgt:

$$w_Y - w_K = \beta n + w_K (\alpha - 1) + \lambda.$$

Stimmen w_Y und w_K überein, so ergibt sich für $\left(\frac{Y}{K}\right)^*$:

$$(12) \quad \left(\frac{Y}{K}\right)^* = \frac{\lambda}{\beta} + n \quad s.$$

Der technische Fortschritt ermöglicht bzw. bewirkt auf dem Gleichgewichtspfad eine ständige Erhöhung der Kapitalintensität, da die Wachstumsrate des Kapitals die der Arbeit um den Faktor $\frac{\lambda}{s}$ übertrifft. Das Ergebnis stimmt insoweit mit jenem bei 'increasing returns to scale' überein. Die explizite Aufnahme des technischen Fortschritts in die Cobb-Douglas Funktion bringt jedoch den Vorteil mit sich, daß die Erhöhung des technischen Wissens nicht mehr verdeckt in konstanten Produktionselastizitäten auftritt, sondern hier in Bedingung (11) gesondert erscheint und somit besser eine

Ökonomische Interpretation der Einflußnahme wachsenden technischen Wissens auf den Wachstumsprozeß erlaubt. Zuvor sei jedoch der Gleichgewichtszustand mit Hilfe einer der Swanschen Darstellung nachempfundenen Abbildung verdeutlicht. Die Berücksichtigung wachsenden technischen Wissens erfordert gegenüber Abbildung 1 nur eine geringfügige Veränderung. Die Wachstumsrate des technischen Wissens ist ebenso wie die der Arbeit unabhängig von der Höhe der Kapitalproduktivität. Die in Abbildung 13 parallel zur Abszisse verlaufende Kurve $\beta_{n+\lambda}$ schließt somit den technischen Fortschritt mit ein, da zum Beitrag der wachsenden Arbeit zum Einkommenswachstum der Beitrag des Fortschritts vertikal hinzuaddiert wird. Alle Ableitungen lassen sich also auch derart interpretieren, als äußere sich das gestiegene technische Wissen in einer Art höheren Arbeitswachstums. Diese Konstruktion gibt damit

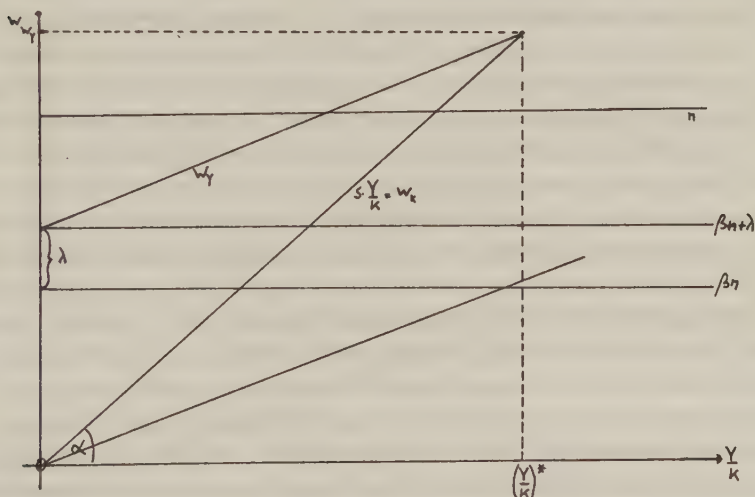


Abb. 13

einen Hinweis auf die Natur der technischen Entwicklung, die dem Modell am weitesten entgegenkommt. Im Gleichgewicht übertrifft bei $w_Y = w_K$ - wie es Bedingung (11) verlangt - die Wachstumsrate des Kapitals die der Arbeit. Die hier bestehende Kapitalproduktivität hat genau die nach (12) erforderliche, gleichgewichtige Höhe $(\frac{Y}{K})^*$. Der Winkel $\tan \alpha$ mißt einmal das Steigungsmaß der w_K -

Linie, nämlich die Sparquote s , zum anderen auch das Verhältnis $\beta n \propto s \frac{Y}{K}$ zu $\frac{Y}{K}$. Hieraus folgt für den Gleichgewichtswert $(\frac{Y}{K})^*$ Formulierung (12).

Die Sparquote geht abermals nicht in die Gleichgewichtsrate mit ein, nur die exogen festgelegten Wachstumsfaktoren n und λ sowie die Produktionselastizität der Arbeit bestimmen die Höhe der Wachstumsrate des Einkommens. Während die Auswirkungen eines höheren technischen Wissens und einer größeren Wachstumsrate der Arbeit auf der Hand liegen, bedarf der Einfluß von β einer kurzen Verdeutlichung. Da sich definitionsgemäß α und β zu Eins ergänzen, entspricht einem höheren α ein geringeres β . Da diese Produktionselastizitäten nach (9) bzw. (10) die Gewichte der die Höhe von w_Y bestimmenden Wachstumsraten von Arbeit und Kapital bilden, gleichzeitig im Endstadium der Entwicklung aber w_K größer ist als w_L , wird eine Umverteilung zugunsten von α (d.h. eine Verminderung von β) die Wachstumsrate des Einkommens im Gleichgewicht erhöhen. Der wesentliche Unterschied im Vergleich zu einem Wachstumsprozeß bei konstantem technischen Wissen besteht in der bereits andeutungsweise aufgezeigten Entwicklung des Pro-Kopf-Einkommens. Während in 2.1. auf dem Gleichgewichtspfad bei konstanter Kapitalintensität neben der invarianten Kapitalproduktivität auch das Pro-Kopf-Einkommen unverändert blieb, bewirkt jetzt der technische Fortschritt bei ansteigender Kapitalintensität eine Konstanz der Kapitalproduktivität, indem er den abnehmenden Grenzerträgen des überproportional eingesetzten Faktors Kapital genau entgegenwirkt. Während folglich die Verzinsung trotz ständigen Mehreinsatzes an Kapital sich nicht verändert, erhöht sich das Pro-Kopf-Einkommen der Arbeiter proportional zum Wachstum des technischen Wissens. Diese Entwicklung ist wiederum nur aus den Modellannahmen zu verstehen, da durch die Beziehung $w_K = s \frac{Y}{K}$ die Wachstumsrate des Kapitals als einziger endogener Faktor im System behandelt wird. Die Natur des technischen Fortschritts muß dann zwangsläufig arbeitssparender Art sein, denn eine Konstanz der Wachstumsrate des Kapitals kann nur in Verbindung mit unverändertem Einkommenswachstum herrschen, so daß zur Kompensation des technischen Wissens mehr Kapital eingesetzt werden muß. Die Effizienzsteigerung wird voll der Grenzproduktivität der Arbeit, d.h. dem Lohn zuteil; dadurch bewirkt sie die Konstanz der funktionalen Einkommensverteilung. Da der Blick der Wirtschaftssubjekte

Jedoch mehr auf die personelle Verteilung gerichtet ist, diese sich aber durch die divergierende Lohn- und Zinsentwicklung verändert, scheint eine konstante, exogen bestimmte Entwicklung der Wachstumsraten etwas realitätsfremd. Es empfiehlt sich, in diesem Zusammenhang die Ansätze von Minami zu beachten, der die Wachstumsraten der Arbeit und des Kapitals in Abhängigkeit von Lohn- und Zinshöhe analysiert¹⁾. Hier muß darauf verzichtet werden, da die Untersuchung streng im Rahmen der Prämissen des einfachsten neoklassischen Ansatzes erfolgt. Bleibt dementsprechend die Annahme der Konstanz des Arbeitswachstums und der Sparquote aufrechterhalten, dann liegt die Vermutung nahe, daß der beschriebene Gleichgewichtszustand mit $\left(\frac{Y}{K}\right)^* = \frac{\lambda}{\delta s} + \frac{n}{s}$ weiterhin stabil ist.

3.1.3. Die Stabilität des Gleichgewichts.

Der Stabilitätsbeweis läßt sich natürlich ebenso wie in 2.1. mit Hilfe der Bestimmung von Zeitpfaden für die Kapital- und Einkommensentwicklung vornehmen. Die einzelnen Schritte in 2.1.4. bedürfen hierzu nur gewisser formaler Änderungen. Da jedoch die explizite Aufnahme des technischen Wissens in die Produktionsfunktion auf elegantere Art als bisher in den Vintage-Modellen durchgeführt wird, wird in späterem Zusammenhang dieser Lösungsversuch noch mehrmals benutzt werden, so daß hier darauf verzichtet werden kann.

Dennoch muß damit auf den Nachweis der Stabilität kein Verzicht geleistet werden. Die tendenzielle Bewegung zum Gleichgewichtspunkt läßt sich an Hand von Abbildung 13 belegen. Angenommen, in der Ausgangssituation wird die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens allein durch das wachsende Arbeitspotential und den Fortschritt determiniert. Die Kapitalproduktivität ist annähernd Null. Dieser Zustand kann nur kurzfristig aufrechterhalten werden, da bei positivem Einkommenswachstum in Verbindung mit einer bestimmten Sparquote sofort die Kapitalbildung aufgenommen wird, d.h. auch die Kapitalproduktivität einen positiven Wert annimmt. Dadurch erhöht sich die Wachstumsrate des Einkommens, wenn auch nur unterproportional zur Veränderung der Wachstumsrate des Kapi-

1) Minami, R., Economic Growth and Labour Supply, in: Oxford Economic Papers, N.S. 16, 1964, S. 194 ff.

Minami, R., A Model of Economic Development from Classical to Neo-Classical Stages, in: Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 97, 1966 II, S. 347 ff.

tals. Da aber weiterhin die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens die des Kapitals übertrifft - obwohl sich beide Raten schon etwas angenähert haben -, nimmt die Kapitalproduktivität abermals zu. Es setzt folglich ein Prozeß gegenseitigen Aufpendelns ein, der nach unendlicher Anpassungsdauer in dem stabilen Gleichgewichtszustand mündet. Der Unterschied zur Situation ohne technisches Wissen liegt darin, daß durch den technischen Fortschritt eine höhere Wachstumsrate des Einkommens ermöglicht bzw. notwendig wird, da durch das technische Wissen ein Teil der abnehmenden Grenzerträge des Kapital kompensiert wird. Da durch die Miteinbeziehung des technischen Fortschritts keine Veränderung der Stabilität des Systems hervorgerufen wird, fragt es sich, ob eventuell durch steigendes technisches Wissen eine Beschleunigung der Anpassung erreicht werden kann.

3.1.4. Die zeitliche Dauer des Anpassungsprozesses.

In der Beantwortung der Frage, inwieweit das wachsende technische Wissen die Dauer des Anpassungsprozesses beeinflusst, kann ebenfalls auf frühere Erkenntnisse zurückgegriffen werden, denn die exakte Berechnung erfährt gegenüber der Ableitung der Gleichungen (51) und (53) in 2.1.4. nur eine kleine formale Veränderung, insofern als der technische Fortschritt in die der Ableitung zugrundegelegten Produktionsfunktion aufgenommen werden muß¹⁾. Die Höhe der Kapitalproduktivität, die c-Prozent des neuen Gleichgewichtswertes $(\frac{Y}{K})^* = h^*$ repräsentiert, wenn eine Störung durch Variation der Sparquote entstanden ist, wird jetzt durch

$$(13) \quad h_c = \left(\frac{\lambda}{\beta} + n \right) \frac{[s_1 - c(s_1 - s_0)]}{s_0 s_1}$$

determiniert. Bei identischer Wertekonstellation wird also durch den technischen Fortschritt die tatsächliche Kapitalproduktivität absolut größer sein als unter Konstanz des technischen Wissens. Damit kann jedoch noch keine Aussage über die Anpassungsgeschwindigkeit getroffen werden, denn identische Sparquoten müssen gerade wegen der bei Berücksichtigung von technischem Fortschritt höheren Wachstumsrate auch eine höhere gleichgewichtige Kapitalproduktivität h^* implizieren. Anders dagegen, wenn in (53) aus

1) Sato, R., Fiscal Policy...a.a.O., S. 20.

2.1.4. λ berücksichtigt wird. Jetzt läßt sich an Hand von

$$(14) \quad t_c = \frac{\ln \left(1 + \frac{sc}{\lambda(1-c)} \right)}{\lambda + \beta n}$$

feststellen, daß ein autonomer technischer Fortschritt die Anpassungsdauer ebenso wie eine höhere Wachstumsrate der Arbeit verkürzt. Um noch einmal das Zahlenbeispiel aus 2.1.4. aufzugreifen, ergibt sich bei einer Rate des Fortschritts von 10% eine 20%-tige Anpassung bereits nach 3,4 Perioden, eine 90%-tige Anpassung nach ungefähr 50 Perioden. Die ökonomische Erklärung ist ähnlich wie im Fall des höheren Arbeitswachstums. Der technische Fortschritt erlaubt selbst bei relativ hoher Kapitalintensität eine hohe Kapitalproduktivität. Ein Rückgang der Wachstumsrate des Kapitals wird deshalb von einer starken Verminderung des Einkommenswachstums begleitet, so daß sich die Kapitalproduktivität schneller ihrem c-prozentigen Wert nähert. Aus dieser Sicht kann auch noch einmal die Auswirkung höherer Werte der Produktionselastizität der Arbeit auf die Anpassungsdauer verstanden werden. Je größer β , um so geringer ist nach Bedingung (11) die Wachstumsrate des Einkommens im Gleichgewichtsfall. Andererseits wird damit die Wachstumsrate des Kapitals nur verhältnismäßig wenig über der der Arbeit liegen, so daß der Beitrag des Kapitals zum Einkommenswachstum vergleichsweise klein ist. Die Kapitalintensitätserhöhung durch eine gestiegene Sparquote bewirkt somit eine relativ starke Erhöhung des Einkommens, so daß Y/K im Augenblick der Störung nur in geringem Umfang sinkt. Der dadurch herbeigeführte Rückgang der Wachstumsrate des Kapitals impliziert dann aber wegen der verhältnismäßig hohen Grenzproduktivität des Kapitals eine überproportional starke Abnahme des Einkommenswachstums, so daß die Kapitalproduktivität in den ersten Perioden in relativ großem Maße abnimmt. Aus diesem Grund bewirkt ein hoher Wert der Produktionselastizität der Arbeit eine vergleichsweise kurze Dauer der Anpassung der Kapitalproduktivität an ihren c-prozentigen Wert. Der technische Fortschritt führt folglich zwei entscheidende Vorteile herbei. Einmal verhilft er der Volkswirtschaft zu einer wesentlich höheren Wachstumsrate, die ebenfalls störungsfrei und stabil ist, zum anderen ruft er bei eventuell auftretenden Störungen eine schnelle Beseitigung des Ungleichgewichts hervor.

Diesen Vorteilen der Miteinbeziehung wachsenden technischen Wissens in das neoklassische Modell stehen andererseits gewisse einschränkende Anforderungen an die Form und Art des technischen Fortschritts und /oder an die zugrundezulegende Produktionsfunktion gegenüber. Einmal kann der technische Fortschritt im Wachstumsmodell deshalb zu einem Störungsfaktor werden, weil durch sein Auftreten eine Veränderung der bestehenden Einkommensverteilung hervorgerufen wird. Diesen Fortschritt bezeichnet man als nicht-neutral in bezug auf die Einkommensverteilung. Aber selbst ein neutraler, d.h. die Verteilung nicht beeinflussender Fortschritt, muß nicht unbedingt mit dem neoklassischen Modell vereinbar sein, wenn nicht weitere einschränkende Prämissen gesetzt werden. Das wird am Beispiel des beschriebenen Modells ganz deutlich. Zwar übt die multiplikative Effizienzerhöhung von sich aus keinen störenden Einfluß auf die bestehende Produktionsmethode aus, da die Produktivitätserhöhung alle Faktoren einheitlich trifft, so daß bei unverändertem Grenzproduktivitätsverhältnis Substitutionsprozesse und damit Verteilungsänderungen unterbleiben, dennoch entspricht eine derartige Form des technischen Fortschritts nicht dem neoklassischen Modell. Durch die Verbindung von Modellprämissen, d.h. endogener Bestimmung der Wachstumsrate des Kapitals, und Erscheinungsart des steigenden technischen Wissens wird ein Substitutionsprozeß herbeigeführt, der nur dann ohne störende Auswirkung ist, wenn die Substitutionselastizität einen Wert von Eins aufweist. Die multiplikative Effizienzsteigerung ist jedoch nur eine mögliche Verschiebungsform der Produktionsfunktion, denkbar sind Erhöhungen der Produktivität der eingesetzten Faktoren in den verschiedenartigsten - neutralen und nicht-neutralen - Kombinationen. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, ein neoklassisches Modell unter der Berücksichtigung des technischen Fortschritts aufzubauen. Einmal kann das Modell mit jeglicher Erscheinungsform des Fortschritts in Verbindung gebracht werden, indem eventuell durch das technische Wissen auftretende Störungen durch die zugrundegelegte Produktionsfunktion beseitigt werden, oder aber es wird eine Form des technischen Fortschritts definiert, die sich nahtlos in das Modell einpaßt und zwar unabhängig von der gewählten Produktionsfunktion. Beide Möglichkeiten sollen im folgenden aufgezeigt werden. Da die verschiedenen Erscheinungsformen tech-

nischen Fortschritts mit den einzelnen Neutralitätsdefinitionen einhergehen, empfiehlt es sich zu Beginn, Verbreitung und Neutralität wachsenden technischen Wissens in Verbindung zu bringen.

3.2. Die Neutralität des technischen Fortschritts.

Bevor es möglich ist, eine Art der technischen Entwicklung aufzuzeigen, die sich nahtlos in das neoklassische Wachstumsmodell einpaßt, oder aber die Voraussetzungen klarzulegen, die die Verwendung jeder Art technischen Fortschritts im Modell gestattet, ist es notwendig, alle Formen steigenden technischen Wissens zu charakterisieren.

3.2.1. Die verschiedenen Verbreitungsmöglichkeiten des technischen Fortschritts.

Der autonome technische Fortschritt äußert sich in einer Verschiebung der Produktionsfunktion, die eine Erhöhung der Produktivität der Faktoren impliziert. Diese muß jedoch keineswegs, wie bisher angenommen, in einer für Kapital und Arbeit gleichförmigen Effizienzsteigerung gemäß λ vonstattengehen, sondern kann willkürlich beide Faktoren in unterschiedlichem Maße treffen. Bezeichnen beispielsweise die Exponenten a und b die Rate der Erhöhung von Arbeits- und Kapitaleffizienz, so verlangt das eine Schreibweise der Produktionsfunktion gemäß¹⁾

$$(1) \quad Y = f(e^{at} L, e^{bt} K).$$

Da die Erhöhung der Effizienz der Faktoren in ihrer Auswirkung einer rein quantitativen Steigerung gleichkommt, können in (1) die Faktoreinsätze sowohl in physischen Größen (L, K) als auch gewichtet mit ihrem Produktivitätsindex als Effizienzeinheiten ($\bar{L}, \bar{K}$) gemessen werden:

$$(2) \quad \bar{K} = e^{bt} K; \quad \bar{L} = e^{at} L.$$

Unter der Annahme eines zeitabhängigen Fortschritts kann demnach

1) Vanek, J., Towards a More General Theory of Growth with Technological Change, in: The Economic Journal, Vol. 76, 1966, S. 841.

ein unverändertes Einkommen nur erstellt werden, wenn nach Maßgabe von a und b die natürlichen Faktoreinheiten vermindert werden. Bleiben die in Effizienzeinheiten gemessenen Faktoreinsätze konstant, so läßt sich im Gegensatz zu (1) - d.h. einer 'shifting production function' - die Abhängigkeit des Einkommens durch eine sog. 'fixed production function'¹⁾

$$(3) \quad Y = F(\bar{K}, \bar{L})$$

beschreiben.

Beide Formen der Produktionsfunktion ermöglichen eine Kennzeichnung der Verbreitung des technischen Wissens, wobei dieser wieder gewisse Neutralitätsdefinitionen zugrundegelegt werden können.

Die anfangs angenommene Verbreitungsform ging von der Voraussetzung aus, daß sich der Fortschrittseffekt gleichmäßig auf Arbeit und Kapital erstreckt, d.h. also, daß in (1) die Konstellation $a=b=\lambda$ besteht. Daneben lassen sich zwei weitere Extremfälle unterscheiden: einmal der rein arbeitsvermehrnde Fortschritt mit $a>0$ und $b=0$

$$(4) \quad Y = F(K, \bar{L}) \quad ,$$

zum anderen der rein kapitalvermehrnde mit $a=0$ und $b>0$

$$(5) \quad Y = F(\bar{K}, L) \quad .$$

Zwischen diesen Extremfällen liegt das weite Spektrum aller durch (1) erfaßten Situationen, in denen jede Form der Erscheinung des technischen Fortschritts nach (3), (4) oder (5) als Sonderfall enthalten ist²⁾.

Innerhalb all dieser Verbreitungsformen interessieren eigentlich nur "...those forms of technical change that shift the production function in such a way to leave undisturbed over time the balance between capital and labour in current production"³⁾, da dadurch eine Kontinuität in der Produktionsmethode gewahrt wird, die einen Vergleich verschiedener Zeitpunkte im Wachstumsprozeß zuläßt.

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic Theory...a.a.O., S. 236.

2) Vanek, J., Towards a More...a.a.O., S. 843.

3) Allen, R.G.D., Macro-Economic Theory...a.a.O., S. 237.

Der Begriff der Neutralität verhilft nun, Charakteristika der durch technischen Fortschritt entstandenen Verschiebung der Produktionsfunktion aufzuzeigen. Dazu werden Punkte auf der neuen und alten Funktion verglichen, um so die Auswirkung des Fortschrittseffektes auf das Faktoreinsatzverhältnis feststellen zu können. Welche Punkte dann als gleichwertig zu betrachten sind, wirft eine Art Indexzahlenproblem auf, da bei jeder Erscheinungsform die gesamte Produktionsfunktion verschoben wird. Es gilt letztlich mit Hilfe der Neutralität die Frage zu beantworten, "what changes would take place if relative factor prices were constant"¹⁾.

3.2.2. Mögliche Definitionen der Neutralität des Fortschritts.

Die älteste Definition neutralen technischen Fortschritts stammt von Hicks, der solche Punkte auf neuer und alter Produktionsfunktion gegenüberstellt, die ein konstantes Einsatzverhältnis von Kapital und Arbeit repräsentieren. Die Faktoreinsätze werden dabei durch natürliche Einheiten gemessen. Als neutral bezeichnet Hicks dann jenen technischen Fortschritt, der die Produktionsfunktion derart verschoben hat, daß bei konstanter Kapitalintensität auch das Verhältnis der Grenzproduktivitäten der Faktoren unverändert ist²⁾. Unter der Annahme einer linear-homogenen Produktionsfunktion, der Wert der Substitutionselastizität ist offensichtlich bedeutungslos, muß bei erfüllter Neutralität damit die Einkommensverteilung unverändert bleiben. Die daraus resultierende Konstanz von α und β kennzeichnet vor allem den verteilungstheoretischen Aspekt dieses Neutralitätspostulats. Hat sich dagegen durch den technischen Fortschritt bei identischer Kapitalintensität das Grenzproduktivitätsverhältnis geändert, so ist der Fortschritt nicht neutral. Er ist entweder kapitalsparend, wenn sich die Grenzproduktivität des Kapitals um weniger als die der Arbeit erhöht hat, oder aber arbeitssparend, wenn die entgegengesetzte Situation eingetreten ist.

Diese Neutralitätsdefinition ist identisch mit der Form $a=b=\lambda$. Alle anderen Arten der Verbreitung implizieren im Hickschen Sinne

1) Salter, W.E.G., Productivity and Technical Change, 2. Aufl., London 1966, S. 29.

2) Hicks, J., The Theory of Wages, 2. Aufl., New York 1946, S. 121 f.

eine nicht-neutrale Entwicklung und damit auch Veränderungen der Einkommensverteilung.

Die notwendige Verschiebung der Produktionsfunktion ist leicht an Hand von Abbildung 14¹⁾ zu erkennen, die für eine linear-homogene Funktion die Kapitalintensität und die Arbeitsproduktivität (Pro-Kopf-Einkommen) in Beziehung setzt. Wie aus den Erläuterungen in den Abschnitten 2.2. und 2.3. deutlich wurde, kann ein derartiger Funktionsverlauf durchaus Änderungen der Verteilung implizieren. Die Hicksche Neutralitätsforderung verlangt, daß die durch technischen Fortschritt nach oben verschobene $f_1(k, 1)$ -Funktion bei konstanten Werten von k ein unverändertes Grenzproduktivitätsverhältnis aufweist. In Abbildung 14 ist dies beispielsweise bei k_1 der

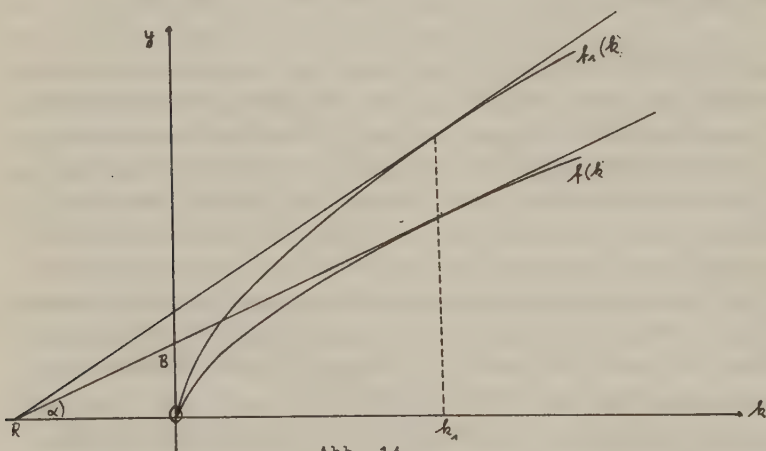


Abb. 14

Fall, denn die Tangenten an die Pro-Kopf-Funktion bei einer Kapitalintensität k_1 ermöglichen eine Bestimmung des herrschenden Grenzproduktivitätsverhältnisses. Die Steigung der Tangente mißt - wie aus früheren Überlegungen bekannt - die Grenzproduktivität des Kapitals, d.h. die Verzinsung. Unzweifelhaft muß diese durch den Fortschritt bei konstanter Kapitalintensität k_1 steigen. Nur wenn sich die Grenzproduktivität der Arbeit, d.h. der Lohn, um den gleichen Prozentsatz erhöht hat, ist der Hickschen Definition genüge geleistet. Eine 10%-tige Einkommenserhöhung wird dann mit

1) Hahn, F.H. and Matthews, R.C.O., The Theory...a.a.O., S. 48.

einer 10%-tigen Steigerung von Zins- und Lohneinkommen kombiniert. Die Lohnhöhe vor Eintritt des technischen Fortschritts ist in Abbildung 14 gleich dem Ordinatenabschnitt $OB=y/L$. Der die Steigung der Tangente messende Winkel α bestimmt einmal somit die Grenzproduktivität des Kapitals, zum anderen auch das Verhältnis OB zu OR . Die Strecke OR kennzeichnet folglich das Grenzproduktivitäts- bzw. Faktorpreisverhältnis. Bleibt auf der Abszisse der Ansatzpunkt der Tangenten an die Pro-Kopf-Funktionen bei k_1 erhalten, so erfüllt der technische Fortschritt die Neutralitätsforderung von Hicks.

Die daraus resultierende Konstanz der Einkommensverteilung läßt sich mit Hilfe sinkender Durchschnitts- und Grenzproduktivitätskurven nach Robinson¹⁾ nachweisen. In Abbildung 15 wird auf der Abszisse der Kapitaleinsatz abgetragen, auf der Ordinate die daraus resultierenden Werte von Grenz- (GP) und Durchschnittsproduktivität (DP). So lange die Annahme abnehmender Grenzerträge Gültigkeit besitzt, müssen bei höheren Kapitaleinsätzen Durchschnitts-

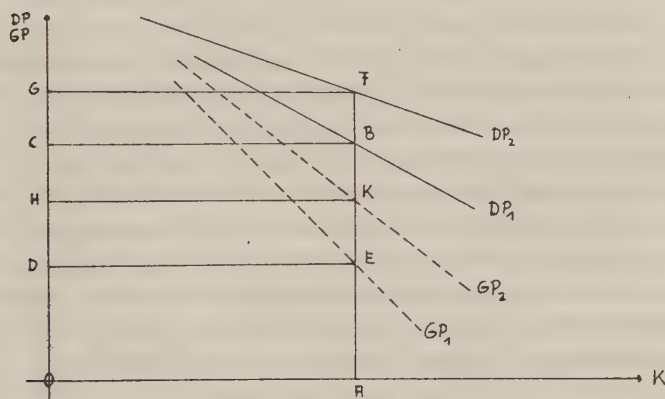


Abb. 15

und Grenzproduktivität des Kapitals sich vermindern. Die Indices 1 und 2 kennzeichnen die Situation vor und nach Eintritt des technischen Fortschritts. Aus Vereinfachungsgründen sei angenommen, daß die Faktoreinsätze unverändert bleiben. Damit entspricht vor der Zunahme des technischen Wissens - die Kurven DP_1 und GP_1 sind

1) Robinson, J., The Classification of Inventions, in: The Review of Economic Studies, Vol. 5, 1937/38, S. 139.

relevant - das Volkseinkommen der Fläche OABC, die Zinssumme OADE und als Restgröße die Lohnsumme DEBC. Nach der Verschiebung der Produktivitätskurven bestimmen die Flächen OAGF das Volkseinkommen, OAHK die Zinssumme und HKGF die Lohnsumme. Die Hickssche Definition verlangt, daß die relative Zunahme des Zinses gleich der des Lohnes sein muß. Daraus ergeben sich zwischen den Flächen die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\text{OAHK} - \text{OADE}}{\text{OADE}} = \frac{\text{HKFG} - \text{DECB}}{\text{DECB}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{OAHK}}{\text{OADE}} = \frac{\text{HKFG}}{\text{DECB}}$$

Da die Zinssumme vor Eintritt des technischen Fortschritts gleich $OA \cdot AE$, die Lohnsumme gleich $OA \cdot EB$ war, danach die entsprechenden Faktoreinkommen gleich $OA \cdot AK$ bzw. $OA \cdot KF$ sind, erfüllt der Hicks-neutrale Fortschritt die Bedingung $AE:EB=AK:KF$, so daß $GP_1:DP_1=GP_2:DP_2$ gilt. Das Verhältnis von Grenz- zu Durchschnittsproduktivität definiert aber auch die Produktionselastizität. Wenn also der Fortschritt in gleicher Weise auf die Produktionselastizität der Arbeit wirkt, zeichnet sich diese Art steigenden technischen Wissens durch eine isoelastische Hebung der Produktionsfunktion aus.

Läßt also der technische Fortschritt bei bestehender Kapitalintensität das Faktorpreisverhältnis unverändert, so ist die Konstanz der Verteilung gewahrt. Ändert sich dagegen das Faktorpreisverhältnis, so kann der Fortschritt nicht Hicks-neutral gewesen sein. Der technische Fortschritt bedarf also zur Aufrechterhaltung des Kapital-Arbeits-Einsatzverhältnisses immer der Form eines multiplikativen Faktors, der sich gleichwertig in einer Effizienzsteigerung beider Faktoren niederschlägt. Diese Verbreitungsform ist jedoch nur ein verhältnismäßig wirklichkeitsfremder Sonderfall. Gerade hinsichtlich der neoklassischen Wachstumstheorie scheint diese Art der Verbreitung nicht besonders geeignet, da weniger die Punkte gleicher Kapitalintensität von Belang sind, als vielmehr für die Existenz einer störungsfreien Wachstumsrate die Konstanz der Kapitalproduktivität unentbehrlich ist. Diese jedoch ist nur zu verwirklichen, wenn entweder wie in 3.1. Kompensationen des störenden Hicks-neutralen Fortschritts durch die Entwicklung der natürlichen Faktoreinsätze erfolgen, oder aber - und das ist der interessierende Fall - technischer Fortschritt gar nicht in Hicks-neutraler Form in Erscheinung tritt.

Auch die in den Gleichungen (4) und (5) zugrundeliegende Art der Verbreitung kann zur Aufstellung eines Neutralitätskriteriums dienen.

Erhöht beispielsweise der technische Fortschritt allein die Effizienz der Arbeit, so ist es unsinnig, Punkte gleicher Kapitalintensität gegenüberzustellen, da über die Veränderung der Grenzproduktivität der Arbeit Substitutionsprozesse induziert werden, die eine (in natürlichen Einheiten gemessene) Kapitalintensität während der Verschiebung der Produktionsfunktion ebenfalls verändern müssen. Als Vergleichsmaßstab verschiedener Punkte eignet sich die Konstanz der Grenzproduktivität des Kapitals, d.h. der Zinssatz r . Ein technischer Fortschritt, der allein die Grenzproduktivität der Arbeit erhöht, enthält unter der Annahme von substituierbaren Faktoren einen Mechanismus, der zu Substitutionsprozessen führt: die effizientere Arbeit verhilft die Produktion zu steigern, so daß bei konstantem Kapitaleinsatz die Kapitalproduktivität zunimmt. Diese Erhöhung der Kapitalproduktivität geht natürlich mit einer Erhöhung der Grenzproduktivität des Kapitals einher, wie es auch die (in Effizienzeinheiten gemessene) Kapitalintensität $K/\bar{L}$ zum Ausdruck bringt. Bei konstantem Zins bildet das den Anlaß, den Kapitaleinsatz auszudehnen, bis Zins und Grenzproduktivität des Kapitals wieder übereinstimmen¹⁾. Die Veränderung des Kapitalkoeffizienten läßt sich damit als Maßstab für ein anderes Neutralitätskriterium verwenden. Ist dieser bei gleichbleibendem Zins nicht verändert worden, so war der Fortschritt hinsichtlich des Faktoreinsatzes neutral. Ein höherer (geringerer) Kapitalkoeffizient ist dagegen jetzt ein Kennzeichen eines arbeitssparenden (kapitalsparenden) Fortschritts. Ist der Fortschritt in diesem Sinne neutral, so muß abermals auch die Einkommensverteilung unberührt bleiben, denn ein konstanter Kapitalkoeffizient bei gleichbleibendem Zins läßt den Anteil des Zinseinkommens am Gesamteinkommen unverändert, so daß bei Linear-Homogenität der Funktion die Arbeit ihren Anteil am Einkommen aufrechterhalten haben muß. Arbeitskoeffizient und Grenzproduktivität der Arbeit werden demzufolge kompensierende Bewegungen beschreiben.

Diese Definition des neutralen technischen Fortschritts geht auf Harrod²⁾ zurück. Offensichtlich spielt hierbei im Gegensatz zu

1) Salter, W.E.G., Productivity...a.a.O., S. 40.

2) Harrod, R.F., Dynamische Wirtschaft, a.a.O., S. 34 f.

Hicks vor allem das wachstumstheoretische Interesse eine Rolle, denn dieses Neutralitätskriterium erfordert zu seiner Erfüllung, daß bei gegebenem Zinssatz die Länge des Produktionsprozesses unverändert bleibt¹⁾. Als Maßstab diese Länge benutzt Harrod den Anteil der Arbeit am Volkseinkommen²⁾. Analog zu Abbildung 14 läßt sich diese Definition durch eine Verschiebung der Pro-Kopf-Funktion verdeutlichen. In Abbildung 16 impliziert die Verschiebung dann Harrod-neutralen Fortschritt, wenn bei gegebenem Zins der Kapitalkoeffizient konstant bleibt. Nur dann ist der Einkommensanteil des Kapitals aufrechterhalten worden, da Kapital und Einkommen um den gleichen Prozentsatz gestiegen sein müssen, während der Zins unverändert geblieben ist. In Abbildung 16 mißt

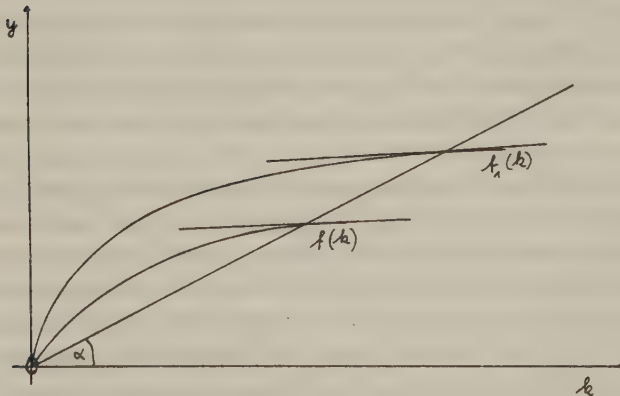


Abb. 16

der Strahl aus dem Ursprungspunkt durch sein Steigungsmaß einen bestimmten Kapitalkoeffizienten. Die Tangente an die Pro-Kopf-Funktion vermittelt die entsprechende Grenzproduktivität des Kapitals. Diese wird dann bei dem gewählten Kapitalkoeffizienten konstant bleiben, wenn die Tangente in den Schnittpunkten des Strahls mit den $f(k,1)$ - bzw. $f_1(k,1)$ -Kurven die gleiche Steigung aufweist. Die Verschiebung der $f(k,1)$ -Kurve ist folglich das

1) Harrod, R.F., Besprechung zu Joan Robinsons Essays in the Theory of Employment, in: The Economic Journal, Vol. 47, 1937, S. 327.

2) ebenda.

Resultat eines Harrod-neutralen Fortschritts, bei dem unabhängig vom Wert der Substitutionselastizität die Einkommensverteilung unberührt bleibt. Der wachstumstheoretische Aspekt der Harrodschen Definition wird daran deutlich, daß der technische Fortschritt verhilft, das Ertragsgesetz derart zu überwinden, daß bei konstanter Fortschrittsrate sich das Einkommen proportional zur Kapitalakkumulation entwickelt, obwohl der Arbeitseinsatz konstant ist bzw. nur unterproportional ansteigt. Die sinkenden Grenzerträge des Kapitals werden durch den ständigen Strom an Erfindungen genau kompensiert. Diese Kompensation erfüllt sozusagen mehr als Nebenprodukt das verteilungstheoretische Interesse.

Die Konstanz der Verteilung weist eine analoge Anwendung von Abbildung 15 nach. Die Achsenbezeichnungen und die Kurvenverläufe sind in Abbildung 17¹⁾ mit denen aus Abbildung 15 identisch. Gemäß Harrods Forderung müssen nun bei Neutralität des Fortschritts

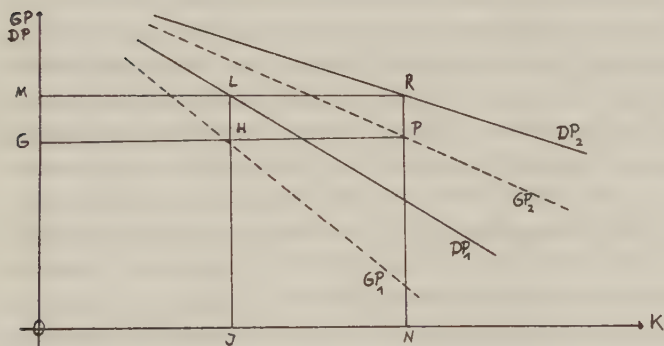


Abb. 17

Verteilung und Grenzproduktivität des Kapitals konstant bleiben, so daß bei unveränderten Relationen LL/Y und rK/Y auch das Verhältnis rK/LL bestehen bleibt. Hat der Zinssatz eine Höhe von $r=OG$, so wird in der Ausgangssituation entsprechend der GP_1 -Kurve eine Menge OJ an Kapital eingesetzt. Das Kapitaleinkommen ist somit der Fläche $OJ.HJ=OGHJ$ gleich. Das Gesamteinkommen entspricht dem Rechteck $OJLM$, so daß das Arbeitseinkommen sich als Restgröße $GLHM$ be-

1) Robinson, J., The Classification...a.a.O., S. 139.

stimmt. Das Verhältnis von Kapital- zu Arbeitseinkommen ist demgemäß gleich $OGHJ:GHLM$ bzw. $JH:HL$. Der technische Fortschritt muß nun die Produktivitätskurven so verschieben, daß dieses Verhältnis bestehen bleibt. Nach Eintritt des technischen Fortschritts wächst der Kapitaleinsatz gemäß der gestiegenen Grenzproduktivität, bis wiederum die durch Mehreinsatz gesunkene Grenzproduktivität ihren alten Wert, bestimmt durch den konstanten Zinssatz r , erreicht hat. Diesem Substitutionseffekt, der durch den Fortschritt hervorgerufen wird, kommt im Rahmen der Wachstumsanalyse eine besondere Bedeutung zu. Die Höhe der Grenzproduktivität des Kapitals entspricht nun der Strecke $NP=OG$. Der Kapitalstock wird in diesem Prozeß von NJ auf ON erhöht. Nur so läßt sich auch die in Abbildung 16 typische Erhöhung der Kapitalintensität k erklären. Das Kapitaleinkommen wird jetzt durch die Fläche $ONPG$ gekennzeichnet, das Arbeitseinkommen durch $GPRM$. Das Verhältnis beider zueinander ist jetzt: $OGPN:GPRM$ bzw. $NP:PR$. Die Verschiebung der Kurven genügt also dem Neutralitätspostulat von Harrod, denn $NP:PR$ ist identisch mit $HJ:HL$, welches bereits vor Eintritt des Fortschritts bestand.

In Antithese zur Harrod-Neutralität steht letztlich jene Möglichkeit, bei der der Fortschritt sich nur in einer Erhöhung der Produktivität des Kapitalstocks niederschlägt. Die darauf begründete Solow-Neutralität¹⁾ entspricht völlig dem Harrodschen Neutralitätsbegriff, nur daß sie eben von einer anderen Verbreitung des technischen Wissens ausgeht und dadurch die Konstanz des Arbeitskoeffizienten bei gleichbleibendem Lohn verlangt. Diese Variante ist vor allem in der Kapitaltheorie von Interesse und findet besonders in den noch zu behandelnden Vintage-Modellen Verwendung. Ebenso wie bei den anderen Neutralitätskriterien bleibt auch hier die Einkommensverteilung unberührt. Die Solow-Neutralität bedarf wegen ihrer formalen Analogie zur Harrodschen Neutralität keiner besonderen Verdeutlichung, die bisherigen Abbildungen 16 und 17 lassen sich ohne weiteres übernehmen, insofern nur der Faktor Kapital durch den Faktor Arbeit ersetzt wird.

Alle drei Neutralitätsdefinitionen sind letztlich nur auf Extremfälle der Entwicklung des technischen Wissens abgestellt, denn entweder trifft der technische Fortschritt nur einen der das Produktionsergebnis bestimmenden Faktoren oder aber beide im gleichen Verhältnis. Dazwischen liegt jedoch das weite Spektrum wirklichkeits-

1) Solow, R.M., Capital Theory and the Rate of Return, Amsterdam 1963, S. 41 f.

naher Beeinflussungsmöglichkeiten, nämlich alle jene Fälle, in denen die beiden Faktoren von dem wie Manna vom Himmel fallenden Fortschritt in unproportionalem Verhältnis getroffen werden. Diese unzähligen Möglichkeiten genügen keiner Neutralitätsdefinition, so daß alle Formen technischen Fortschritts mit $(a/b) > 0$ hinsichtlich einer ausgeglichenen Entwicklung von Kapital und Arbeit und damit der Einkommensverteilung nicht neutral sind.

Obwohl jede der Definitionen auf ihre Art eine "balance between capital and labour" nachwies, können dennoch nur die von Harrod angeführten Kriterien für das Wachstumsmodell herangezogen werden. Sowohl Hicks- als auch Solow-Neutralität verlangen geradezu durch ihre Definition eine für den neoklassischen Gleichgewichtspfad unmögliche Situation: die Veränderung der Kapitalproduktivität. Die durch die Neutralitätsdefinitionen garantierte Konstanz von α und β allein verhilft noch nicht, die Wachstumsrate des Einkommens konstant zu halten, sie beseitigt nur einen der möglichen Störfaktoren. Daß dennoch Gleichgewichtspfade abzuleiten sind - wie es z.B. in 3.1. unter der Annahme von Hicks-Neutralität der Fall war -, ist demnach nicht nur das Ergebnis einer bestimmten Neutralitätsdefinition, sondern auch auf die Verwendung der Cobb-Douglas Funktion zurückzuführen.

Es ergibt sich damit die Frage, wodurch sich die verschiedenen Neutralitätsfälle im Rahmen der Cobb-Douglas Funktion unterscheiden.

3.2.3. Technischer Fortschritt und Cobb-Douglas Funktion.

Wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt wurde, gelingt es nur unter der Voraussetzung einer konstanten Einkommensverteilung, die neoklassische Gleichgewichtsrage abzuleiten. Jede Veränderung der Verteilungssituation durch den technischen Fortschritt muß möglichst ausgeschlossen werden. Damit erweisen sich alle Arten des nicht-neutralen Fortschritts für die weitere Analyse als ungeeignet. Das mag ein Beispiel verdeutlichen: Erhöht sich bei konstanter Kapitalintensität die Grenzproduktivität des Kapitals stärker als die der Arbeit, so bezeichnet Hicks den Fortschritt als arbeitssparend. Selbst wenn die zugrundegelegte Produktionsfunktion die vereinfachenden Eigenschaften der Cobb-Douglas Funktion aufweist, bewirkt diese Art der technischen Entwicklung eine Einkommensumver-

teilung. Durch die Verminderung des Lohn-Zins-Verhältnisses besitzt die neue Faktorpreislinie nach Eintritt des Fortschritts eine geringere Steigung, so daß die in dem entsprechenden Produktionspunkt tangierende Isoquante sich verschiebt. Da die Form der Produktionsfunktion (linear-homogen und $\delta = 1$) durch den Fortschritt nicht berührt wird, behalten die Isoquanten ihre Krümmung bei, es ändert sich nur ihre Lage im Kapital-Arbeits-Diagramm. Bekanntlich sind aber für die Lage der Isoquanten die Produktionselastizitäten verantwortlich. Mit der Verschiebung der Isoquanten müssen sich demnach α und β , d.h. aber, die Einkommensanteile geändert haben. Diesem störenden Einfluß technischen Fortschritts versucht man durch die Konzeption der Neutralität zu entgehen, wobei jede der drei genannten Definitionen die Konstanz der Verteilung garantiert. Die einzelnen Definitionen unterscheiden sich jedoch durch die Art der Verbreitung des Fortschritts, so daß die gemäß der neutralen Verschiebung zustandekommenden Produktionspunkte auseinanderfallen. Damit wird klar, daß die drei Neutralitätsformen nur unter einer ganz bestimmten Voraussetzung miteinander vereinbar sind: Das Isoquantensystem der zugrundegelegten Produktionsfunktion muß eine durch $\delta = 1$ bestimmte Krümmung aufweisen. Nur im Sonderfall der Cobb-Douglas Funktion werden folglich Hicks-, Harrod- und Solow-Neutralität zum gleichen Ergebnis führen, d.h. eine gleichförmige Verschiebung des Isoquantensystems hervorrufen. Diese Zusammenhänge werden im folgenden noch verdeutlicht.

Wird jedoch durch die Neutralität des Fortschritts die Konstanz von α und β gewahrt, so läßt eine Formulierung der Produktionsfunktion mit Hilfe von Effizienzeinheiten

$$(6) \quad Y = K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$$

bereits äußerlich die Bestätigung früherer Ergebnisse vermuten. Allein die ökonomische Interpretation wird durch den Maßstab 'Effizienzeinheit' schwieriger. Klarer lassen sich die auf den Einbau von technischen Fortschritt zurückzuführenden Zusammenhänge durch eine Produktionsfunktion beschreiben, die neben den naturalen Größen den technischen Fortschritt als multiplikativen Faktor enthält. Da die einzelnen Neutralitätsdefinitionen unter der Voraussetzung von $\delta = 1$ hinsichtlich der Einkommensverteilung immer gleichwertig

sein werden, dann muß, ganz gleich welche Definition der Neutralität zugrundegelegt wird, die Verschiebung der Produktionsfunktion immer gleichartig sein. Eine nach oben verschobene Funktion muß gleichzeitig vergleichbare Punkte aller drei Neutralitätsdefinitionen aufweisen. Bleibt beispielsweise der Arbeitseinsatz konstant, so wird sich mit unveränderten Kapitaleinsatz auch die Einkommensverteilung nicht verschieben. Der Harrod-neutrale Fortschritt wiederum läßt ebenfalls die Einkommensverteilung unverändert, wenn der Kapitaleinsatz in gleichem Verhältnis wie das Einkommen steigt¹⁾. Das ist von Uzawa in einem umfangreichen analytischen Beweis nachgewiesen worden²⁾, läßt sich jedoch auch unter Verwendung der bisherigen graphischen Darstellungen 14 und 16 am Beispiel der Hicks- und der Harrod-Neutralität verdeutlichen. Die aufgrund von technischem Fortschritt nach oben verschobenen Funktionen müssen nämlich deckungsgleich sein, wenn $f(k,1)$ unter der Voraussetzung einer Substitutionselastizität von Eins konstruiert wurde. Ist das in Abbildung 18 der Fall, dann gewährleistet die

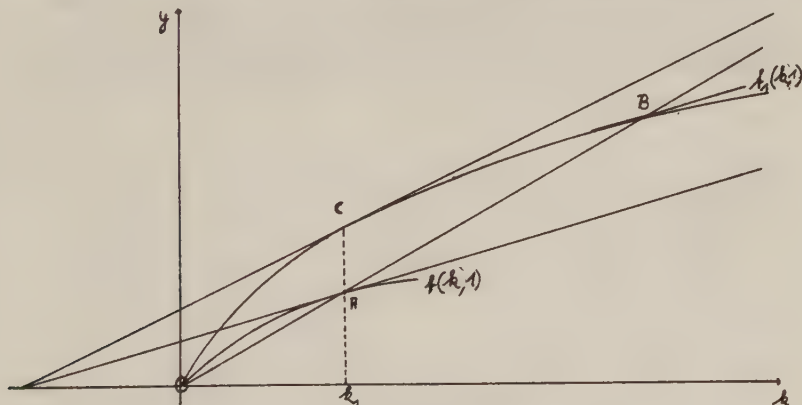


Abb. 18

durch den Fortschritt verschobene Pro-Kopf-Funktion bei konstanter Kapitalintensität ein unverändertes Grenzproduktivitätsverhältnis, gleichzeitig auch bei vergleichbarem Kapitalkoeffizienten die Konstanz der Grenzproduktivität des Kapitals. Die $f_1(k,1)$ -Kurve erfüllt somit die Bedingung der Hicks- und der Harrod-Neutralität.

1) Hahn, F.H. and Matthews, R.C.O., The Theory...a.a.O., S. 51.

2) Uzawa, H., Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium, in: The Review of Economic Studies, Vol.29, 1960/61, S. 117 f.

Da entlang der $f(k,1)$ -Kurve definitionsgemäß die Verteilung unverändert ist, unabhängig vom Wert der Kapitalintensität, muß bei Hicks-Neutralität auch bei allen k -Werten diese Verteilung auf der $f_1(k,1)$ -Kurve bestehen. Sowohl in A als auch in C beziehen die Faktoren den gleichen Anteil. Wenn andererseits gemäß der Harrodschen Bedingung auch A und B die gleiche Verteilung repräsentieren, B wiederum mit C gleichwertig ist, müssen Hicks- und Harrod-Neutralität bei alternativen Kapitalintensitäten die gleichen Pro-Kopf-Einkommen hervorgerufen haben. Die Verschiebung von $f(k,1)$ nach $f_1(k,1)$ ist in beiden Fällen identisch.

Dieser Zusammenhang wird an Hand einer Verschiebung der Isoquante im Isoquantenschema noch deutlicher. Technischer Fortschritt ermöglicht, dasselbe Produktionsergebnis Y_0 - repräsentiert in Abbildung 19¹⁾ durch die Isoquante I - bei quantitativ geringeren Faktoreinsätzen zu verwirklichen, so daß die Isoquante II das gleiche Einkommen Y_0 nach Eintritt des technischen Fortschritts beschreibt. Ist dieser Fortschritt Hicks-neutral, so muß die Produktionsmethode und das Faktorpreisverhältnis auf beiden Isoquanten gleich sein. Die konstante Kapitalintensität wird durch den unveränderten Winkel α , das gleichgebliebene Grenzproduktivitäts-

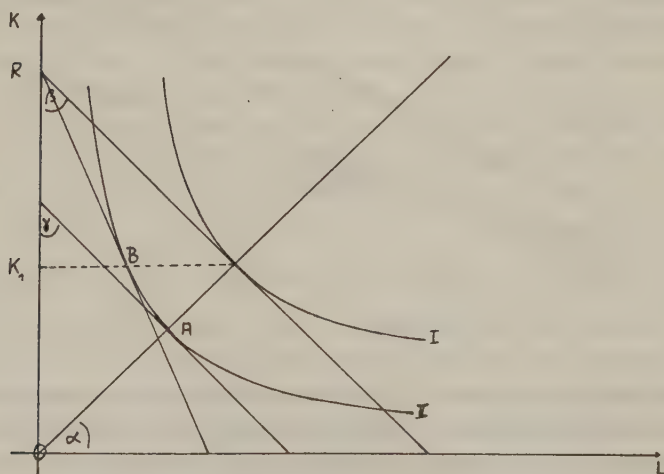


Abb. 19

verhältnis durch die Übereinstimmung der Winkel β und γ bestätigt.

1) Jones, R.W., "Neutral" Technological Change in the Isoquant Map, in: The American Economic Review, Vol. 55, 1965 I, S. 849 f.

Die durch Punkt A verlaufende Isoquante ist jedoch auch mit Harrod-neutralen Fortschritt vereinbar, wenn die zugrundegelegte Produktionsfunktion oben beschriebene Bedingungen erfüllt. Ursache hierfür ist der konstante Zins r , der in Abbildung 19 durch die Strecke $OR = Y_0/r$ zu ermitteln ist. Da sowohl Y_0 als auch r definitionsgemäß konstant sind, muß das Verhältnis OR auch nach Vollzug des technischen Fortschritts erhalten bleiben. Der Kapitalkoeffizient ergibt sich durch das in Isoquante I repräsentierte Einkommen Y_0 und den Kapitaleinsatz K_1 . Wird beim Verhältnis OR dieser Kapitaleinsatz K_1 aufrechterhalten, so ist B ein Punkt der durch Harrod-neutralen Fortschritt verschobenen Isoquante II. Diese ist deckungsgleich mit jener bei Hicks-neutralen Fortschritt.

Die Ursache der gleichartigen Verschiebung der Isoquante, unabhängig von der Neutralitätsdefinition, läßt sich an Hand der Konstruktion von Abbildung 19 aufzeigen. Entsprechend den Annahmen über die Produktionsfunktion müssen die Isoquanten I und II rechtwinklige, gleichseitige Hyperbeln darstellen, da -1 und $-$ vorausgesetzt wurde. Die Substitutionselastizität einer Hyperbel läßt sich mit Hilfe des Streckenverhältnisses $AB:BC$ in Abbildung 20 messen, da in dem Berührungspunkt A das Lohn-Zins-Verhältnis

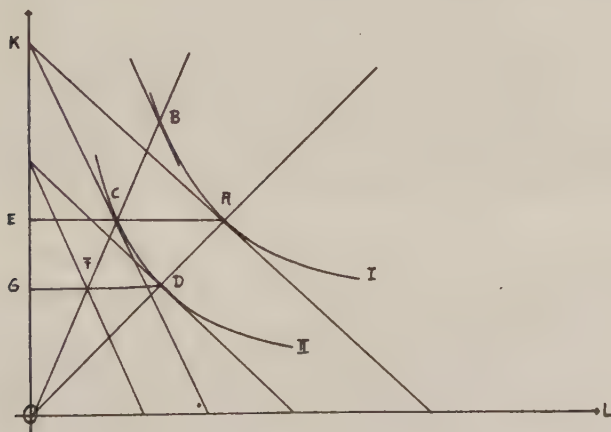


Abb. 20

durch die tangierenden Faktorpreislinie bestimmt wird.¹⁾ Die entsprechende Kapitalintensität ist aus der Steigung des in A schneiden-

1) Jones, R.W., "Neutral" Technological Change...a.a.o., S. 848/849.

den Strahls aus dem Ursprungspunkt zu ermitteln. Wird die Produktionsmethode derart geändert, daß jetzt mit höherer Kapitalintensität im Punkt B produziert wird, dann muß sich bei isoelastischen Kurven die Substitutionselastizität bestimmen lassen. Durch die Bewegung von A nach B vergrößern sich die absoluten Steigungsmaße der K/L- und der Faktorpreisl Linie. Die Veränderung von K/L ist gleich dem Verhältnis AC:AE, die von l/r ist gleich AC:AE. Die Substitutionselastizität der Isoquante I beträgt genau Eins. Tritt jetzt die Harrod-neutrale Verschiebung ein, dann muß im Punkt C die gleiche Substitutionselastizität wie in B bestehen. Die Hicks-neutrale Verschiebung muß zur Isoquante II führen, deren Substitutionselastizität im Punkt D ebenfalls gleich Eins ist. Der Streckenvergleich analog zu AC:AE ergibt hier ein Verhältnis beim Übergang von C nach D, welches nach $DF:DG=DF:DG$ ebenfalls für D die notwendige Substitutionselastizität von Eins erbringt. Nur wenn $\delta = 1$ ist, werden durch Hicks- und Harrod-Neutralität die Isoquanten in gleichem Ausmaß verschoben. Alle Werte von $\delta \neq 1$ lassen diese Konsequenz nicht mehr zu.

Offensichtlich ist aber auch, daß bei einer Substitutionselastizität von Eins alle Kombinationen von Hicks- und Harrod-Neutralität, d.h. Fälle mit $a \neq b > 0$, die Verteilung nicht verändern werden und - bei entsprechender quantitativer Dosierung des Fortschrittseffektes - zu einer Isoquante II in Abbildung 20 führen werden.

Wird folglich eine Produktionsfunktion zugrundegelegt, die die Eigenschaften der Cobb-Douglas Funktion beinhaltet, dann verliert der Neutralitätsbegriff wesentlich an Bedeutung. Die Produktionsfunktion vermag in der Art eines Filters alle störenden Einflüsse ausschalten.

Die den einzelnen Neutralitätsdefinitionen zugrundegelegten Verbreitungsformen des Fortschritts lassen sich nun in der Formulierung der Produktionsfunktion kenntlich machen.

Aus den vorangegangenen Überlegungen geht hervor, daß Hicks-neutraler Fortschritt den Wirkungsgrad von Arbeit und Kapital in gleichem Verhältnis erhöht. Die Wachstumsraten von Arbeits- und Kapitaleffizienz sind gleich, so daß sich bei $a=b=\lambda$ aus (1) unter der Beachtung der Linear-Homogenität die exponentielle Rate ausklammern läßt:

$$(7) \quad Y = e^{\lambda t} F(K, L) .$$

Bezeichnet man den multiplikativen Faktor mit $A(t)$, so folgt aus (7) die von Uzawa abgeleitete Form¹⁾:

$$(8) \quad Y = A(t) F(K, L)$$

für eine Produktionsfunktion mit Hicks-neutralem Fortschritt.

Unter der Annahme von Harrod-Neutralität ist die Wachstumsrate der Kapitalproduktivität gleich Null:

$$(9) \quad Y = F(K, e^{at}L)$$

Benutzt man für e^{at} wiederum den Term $A(t)$, so kennzeichnet eine Funktion²⁾

$$(10) \quad Y = F(K, A(t)L)$$

Harrod-neutralen Fortschritt.

Entsprechend wird in einer Produktionsfunktion der technische Fortschritt als Solow-neutral charakterisiert, wenn der Term $A(t)$ dem Kapital zugeordnet ist:

$$(11) \quad Y = F(A(t)K, L)$$

Diese Formulierung als 'shifting production function' läßt sich ohne weiteres durch Zusammenfassung von $A(t)L$ als $\bar{L}$ in die 'fixed production'-Form umwandeln, die in der Schreibweise der Cobb-Douglas Funktion fast unverändert in der in 2.1. verwandten Form

$$(12) \quad Y = K^\alpha \bar{L}^\beta$$

erscheint³⁾ und somit formal die synonyme Handhabung verdeutlicht. Wenn auch im Rahmen der Cobb-Douglas Funktion die einzelnen Neutralitätsdefinitionen eine gleichförmige Verschiebung hervorrufen, so bestehen doch quantitative Unterschiede in ihrer Auswirkung auf das Produktionsergebnis, insofern $A(t)$ in (8), (10) und (11) einen gleich hohen Wert darstellt. Die gegenseitigen Beziehungen der Neutralitätsformen lassen sich leicht unter Benutzung einer

1) Uzawa, H., Neutral Inventions...a.a.O., S. 120.

2) derselbe, S. 119/120.

3) Allen, R.G.D. Macro-Economic Theory, a.a.O., S. 236

Cobb-Douglas Funktion ableiten.

Ist beispielsweise nach (7) der Fortschritt multiplikativer Natur, so bestimmt sich die dazugehörige Cobb-Douglas Funktion durch

$$(13) \quad Y = A(t) \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\alpha}$$

Entwickelt sich dieser Fortschritt in der Zeit mit konstanter Rate a , so läßt sich auf der Grundlage von

$$(14) \quad Y = e^{at} L^{(1-\alpha)} K^{\alpha}$$

dieses a je nach Erscheinungsform interpretieren.

Im Fall des Harrod-neutralen Fortschritts mit einer konstanten Rate m , steht a zu m in folgender Beziehung:

$$\begin{aligned} Y &= K^{\alpha} \bar{L}^{1-\alpha} & \bar{L} &= e^{mt} L \\ Y &= K^{\alpha} (e^{mt} L)^{1-\alpha} \\ (15) \quad Y &= e^{m(1-\alpha)t} L^{1-\alpha} K^{\alpha} \end{aligned}$$

Der sich in der Zeit mit der konstanten Rate a entwickelnde Fortschritt muß unter der Voraussetzung von Harrod-Neutralität gleich dem Term $m(1-\alpha)$ sein.

Vollzieht sich dagegen der Solow-neutrale Fortschritt mit der Rate m , so ergibt sich folgende Beziehung zu a :

$$\begin{aligned} Y &= \bar{K}^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} & \bar{K} &= e^{mt} K \\ Y &= (e^{mt} K)^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \\ (16) \quad Y &= e^{m\alpha t} \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Unter der Annahme von Solow-Neutralität muß die konstante Rate a dem Wert αm gleich sein.

Liegt Hicks-neutraler Fortschritt vor, so bestimmt sich a als

$$Y = \bar{K}^{\alpha} \bar{L}^{1-\alpha} \quad \bar{K} = e^{mt} K; \quad \bar{L} = e^{mt} L$$

$$\begin{aligned} Y &= (e^{mt} K)^{\alpha} (e^{mt} L)^{1-\alpha} \\ (17) \quad Y &= e^{mt} K^{\alpha} L^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung von Hicks-Neutralität müssen folglich α und m übereinstimmen¹⁾.

Ein Vergleich der 'shifting parameter' in den Gleichungen (15) und (17) offenbart, daß ein Harrod-neutraler Fortschritt in seiner einkommenserhöhenden Wirkung immer dem Hicks-neutralen Fortschritt überlegen sein muß. Beträgt die Harrod-neutrale Fortschrittsrate m , die Hicks-neutrale α , dann gilt wegen $\alpha=m$ und $\alpha=m(1-\alpha)$ für den Harrod-neutralen Fortschritt, ausgedrückt als Hicks-neutraler Parameter $\alpha/(1-\alpha)=m$. Ursache der stärkeren Einkommenserhöhung bei Harrod-neutraler Entwicklung ist offensichtlich die zusätzlich zur Effizienzsteigerung hinzutretende Kapitalakkumulation, die notwendig ist, den bestehenden Kapitalkoeffizienten aufrechtzuerhalten.

Das wurde bereits an Hand von Abbildung 18 deutlich.

Die Produktionsfunktion kann in ihrer allgemeinen Formulierung (14) sowohl Hicks-, Harrod- und Solow-Neutralität implizieren, "all that needs to be done, to distinguish the three cases, is to interpret the parameter α appropriately in terms of the constant rate m of technical progress"²⁾. Da die Verschiebung bei allen drei Formen des Fortschritts gleichartig ist, besteht die Möglichkeit, aus

$$(18) \quad m = m\alpha = m(1-\alpha)$$

jederzeit Hicks- in Harrod und Solow-Neutralität umzuwandeln.

Dies gestattet, den in 3.1. benutzten Parameter λ durch die jeweilige Formulierung der Neutralität nach (15), (16) oder (17) einzusetzen und dadurch die neoklassischen Wachstumsraten unter Hicks-, Harrod und Solow-Neutralität zu spezifizieren.

Es ist jedoch notwendig, nochmals darauf hinzuweisen, daß die Neutralitätsdefinitionen von Hicks und Solow als solche für das beschriebene Modell ungeeignet sind, so daß sie mehr als eine mögliche Verbreitungsform Geltung besitzen. Der Gleichgewichtspfad

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic Theory, a.a.O., S. 249.

2) derselbe, S. 250.

kann trotz des Hicks- oder Solow-neutralen Fortschritts nur deshalb verwirklicht werden, weil die zugrundegelegte Produktionsfunktion bei einer Substitutionselastizität von Eins die einmal angenommene Verteilung bestehen läßt. Das äußerliche Zeichen dieser verschiedenartigen Verbreitungsformen werden die unterschiedlichen, störungsfreien Wachstumsraten sein.

3.2.4. Die gleichgewichtigen Wachstumsraten bei alternativen Formen des technischen Fortschritts.

Gleichung (18) gestattet es, durch Umformulierung der Gleichgewichtsbedingung (11) aus 3.1.2. die jeweiligen Wachstumsraten in den Fällen des technischen Fortschritts je nach Hicks-, Harrod- und Solow-Neutralität abzuleiten; in (11) aus 3.1.2

$$(19) \quad z = n + \frac{\lambda}{\beta} = w_Y = w_K$$

muß λ nur durch die entsprechende Neutralitätsformulierung ersetzt werden.

Unter der Annahme von Harrod-Neutralität folgt für eine Fortschrittsrate von λ -Prozent:

$$(20) \quad z = n + m = w_Y = w_K$$

Die Größe des Fortschritts und der wachsenden Arbeit bestimmen das Ausmaß des störungsfrei wachsenden Einkommens. Dieses Ergebnis kann als Indiz für die bereits in früherem Zusammenhang geäußerte Vermutung gewertet werden, daß zwischen Arbeitseinsatzhöhung und Harrod-neutralem Fortschritt kein Unterschied besteht. Aus Gleichung (20) wird weiterhin deutlich, daß die Einkommensverteilung auf dem Gleichgewichtspfad von dem technischen Wissen überhaupt nicht berührt wird und auf die Höhe von w_Y keinen Einfluß nimmt.

Das ist anders, wenn eine der beiden anderen Fortschrittsarten vorliegt. Der Solow-neutrale Fortschritt mißt der bestehenden Verteilung für die Höhe der Wachstumsrate besondere Bedeutung bei, denn nach

$$(21) \quad z = n + \frac{\alpha}{\beta} m = w_Y = w_K$$

bestimmt sich w_Y durch das Arbeitswachstum und einen durch das Verhältnis der Produktionselastizitäten determinierten Prozentsatz der Wachstumsrate des technischen Wissens. Ein Vergleich von (20) und (21) zeigt, daß die bei Solow-neutralem Fortschritt abgeleitete Wachstumsrate die bei Harrod-neutralem über- oder unterschreiten kann, abhängig von der Verteilung.

Unter der Voraussetzung von Hicks-neutralem Fortschritt, der sich in einer proportionalen Effizienzsteigerung beider Faktoren äußert, müssen λ und m übereinstimmen. Für die gleichgewichtige Wachstumsrate folgt hieraus

$$(22) \quad z = n + \frac{m}{\beta} = w_Y \cdot w_K.$$

Da in (22) der Term m den Hicks-neutralen Fortschritt repräsentiert, dieser jedoch - vom Extremfall $\beta = 1$ abgesehen - immer kleiner als ein entsprechender Harrod-neutraler Fortschritt sein muß, muß folglich auch die bei Hicks-neutraler technischer Entwicklung anfallende Wachstumsrate des Einkommens geringer sein.

Dennoch bedürfen die Gleichungen (20), (21) und (22) einer genaueren ökonomischen Interpretation, die vor allem die Prämissen des Modells und die Eigenheit der Cobb-Douglas Funktion im Auge behält. Wie aus Gleichung (19) abgeleitet, ist bei jeder Verbreitungsform des wachsenden technischen Wissens eine störungsfreie Wachstumsrate des Einkommens zu ermitteln. Das scheint um so verwunderlicher, als gerade Hicks- und Solow-Neutralität diesem Gleichgewichtswachstum dadurch entgegenstehen, daß eine konstante Kapitalproduktivität ständig durch die Effizienzsteigerung des eingesetzten Kapitals unmöglich scheint. Eindeutig vereinbar mit dem neoklassischen Modell ist offensichtlich nur die Harrodsche Neutralitätsdefinition, die sich nahtlos in den Prämissenkranz einfügen läßt. Wenn dennoch bei wachsender Produktivität des Kapitals ein störungsfreies Wachstum verwirklicht werden kann, dann muß die Verantwortung hierfür nicht dem technischen Fortschritt - unabhängig von der Neutralität - sondern den anderen Prämissen zuzuschreiben sein. Das läßt sich an Hand von (20) bis (22) klarmachen, wenn man versucht die unterschiedliche Höhe der gleichgewichtigen Wachstumsrate zu begründen.

Die quantitativ verschiedenen Wachstumsraten in den Gleichungen

(20), (21) und (22) beruhen natürlich auf den verschiedenartigen Erscheinungsformen des technischen Fortschritts in Verbindung mit den für das Modell typischen Annahmen einer konstanten Sparquote und einer exogen vorgegebenen Wachstumsrate der Arbeit. Der konstante Fortschritt verhilft die Faktoreinsätze in Effizienzeinheiten zu messen, wobei die Art der Verbreitung und die damit zugrundeliegende Neutralitätsdefinition relevant wird. Aus der Formulierung der 'fixed production function' wird klar, daß die konstante Entwicklung immer dann gewährleistet ist, wenn die in Effizienzeinheiten gemessenen Wachstumsraten der Faktoren übereinstimmen. Andererseits läßt sich das Einkommen nur in natürlichen Einheiten (Anzahl der Güter nach einem beliebigen Maßstab) bewerten. Gleichzeitig setzt die Veränderung aber auch den Maßstab der Produktivitätserhöhung, so daß bei Übereinstimmung von w_Y und w_K in der Interpretation auch die in natürlichen Einheiten gemessene Wachstumsrate des Kapitals zugrundegelegt werden muß. Hieraus erklärt sich die unterschiedliche Höhe der einzelnen Wachstumsraten. Verbreitet sich der technische Fortschritt gemäß der Harrodschen Neutralitätsdefinition in Form steigender Arbeitseffizienz, so ist das die Voraussetzung einer in natürlichen Einheiten gemessenen höheren Wachstumsrate des Kapitals. Zwei Ursachen bewirken das: Einmal läßt sich die Übereinstimmung von Einkommens- und Kapitalwachstum mit der in Effizienzeinheiten gemessenen Wachstumsrate der Arbeit durch die Neutralitätsdefinition erklären, zum anderen führt das neoklassische Modell aufgrund seiner Prämissen automatisch zu diesem Wachstumsgleichgewicht. Letzteres wird deutlich, wenn man sich erinnert, daß der Fortschrittseffekt verhilft, das Einkommen über eine einstweilen bestehende Wachstumsrate dadurch zu steigern, daß bei konstanter Sparquote und steigender Kapitalproduktivität auch die Wachstumsrate des Kapitals sich so lange erhöht, bis die abnehmenden Grenzerträge des Kapitals durch die Effizienzerhöhung der Arbeit kompensiert werden, wie es Bedingung (20) widerspiegelt. Gleichzeitig ist hier auch die Harrods-Neutralität gewahrt, denn die Konstanz des Kapitalkoeffizienten bei wachsendem Fortschritt wird durch die entsprechend höhere natürliche Wachstumsrate des Kapitals hervorgerufen. Die um den Prozentsatz der Arbeitseffizienzsteigerung erhöhte Wachstumsrate des Kapitals dient somit der Erfüllung der Harrodschen Neutrali-

tätskriterien als auch der Störungsfreiheit des Wachstums. Der die Produktivität der Arbeit erhöhende Fortschritt ist in dem Wachstumsmodell identisch mit einer um diesen Prozentsatz höheren natürlichen Wachstumsrate der Arbeit.

So nahtlos sich diese Art des technischen Fortschritts in das Modell einpaßt, so modellfremd müssen dagegen die beiden anderen Erscheinungsformen des technischen Wissens sein. Erhöht der Fortschritt nur die Produktivität des Kapitals, so wie Solow es seiner Neutralitätsdefinition zugrundelegt, so wird gerade die einzige endogene Wachstumsrate durch den exogenen Faktor Fortschritt beeinflusst. In Form der 'fixed production function' kann bei Linear-Homogenität eine konstante Entwicklung des Volkseinkommens nur dann verwirklicht werden, wenn die in Effizienzeinheiten gemessene Wachstumsrate des Kapitals mit der natürlichen Rate des Arbeitswachstums übereinstimmt ($w_K = w_L = n$). Da auf dem Gleichgewichtspfad nach (21) aber die in natürlichen Einheiten gemessene Wachstumsrate des Kapitals größer ist als die natürliche Wachstumsrate der Arbeit, muß w_K , gemessen in Effizienzeinheiten, auch kleiner sein als w_L , gemessen in natürlichen Einheiten. Die Ursache ist wiederum die Annahme der linear-homogenen Produktionsfunktion. Die entsprechend der konstanten Sparquote aus dem Einkommen abgezweigten Anteile, die als Zuwachs zum Kapitalstock die Wachstumsrate des Kapitals bestimmen, müssen ein größeres Ausmaß als der dieses Kapitalwachstum begleitende Fortschritt besitzen. Nur so können die abnehmenden Grenzerträge des stärker wachsenden natürlichen Kapitaleinsatzes derart kompensiert werden daß sich die in (21) abgeleitete störungsfreie Wachstumsrate ergibt. Die Wachstumsrate bei Solow-neutralem Fortschritt wird für den Gleichgewichtspfad folglich größer sein, weil durch höheres natürliches Kapitalwachstum abnehmende Grenzerträge sowohl in der Höhe des Arbeitswachstums als auch zusätzlich in Höhe der Fortschrittsrate kompensiert werden. Wiederum wird der Fortschritt eher der Harrod-neutralen Art entsprechen, denn bei konstantem Kapitalkoeffizienten und unveränderter Grenzproduktivität des Kapitals wird die Grenzproduktivität der Arbeit proportional zur Abnahme des Arbeitskoeffizienten ansteigen (wegen der Substitutionselastizität von Eins). Die natürliche Wachstumsrate des Kapitals, die auf dem Gleichgewichtspfad mit der des Einkommens übereinstimmt, wird somit auch

bei Solow-neutralem Fortschritt über der Wachstumsrate ohne technischen Fortschritt liegen. Dabei wird w_K um so größer sein müssen, je höher auch die Produktionselastizität des Kapitals ist, da bei einem hohen Wert von α die notwendige Abnahme der Grenzerträge nur erreicht werden kann, wenn relativ viele natürliche Kapitaleinheiten eingesetzt werden.

Auch Hicks-neutraler Fortschritt ist nach (22) mit dem neoklassischen Gleichgewichtspfad zu verbinden, aber auch hier muß die in natürlichen Einheiten gemessene Wachstumsrate des Kapitals zur Kompensation des Fortschrittseffekts einen höheren Wert annehmen. In der 'fixed production function' ist die Konstanz der Wachstumsrate des Einkommens nur zu verwirklichen, wenn die in Effizienzeinheiten gemessenen Wachstumsraten von Arbeit und Kapital übereinstimmen. Im Rahmen der Modellannahmen muß jedoch diese Übereinstimmung durch einen Überschuß der in natürlichen Einheiten gemessenen Wachstumsrate des Kapitals über die Wachstumsrate der Arbeit erkauft werden, da bei unveränderter Sparquote ständig ein bestimmter Bruchteil des Einkommens (welches sich auch wegen der Effizienzsteigerung erhöht) dem Kapitalstock zur Verfügung gestellt wird, so daß die natürliche Wachstumsrate zunehmen muß. Dieser Zuwachs zum Kapital vermag aber wegen $\alpha < 1$ das Einkommen nur unterproportional zur Erhöhung der Wachstumsrate des Kapitals ansteigen lassen, so daß in der Folgezeit die natürliche Wachstumsrate des Einkommens relativ sinkt, d.h. sich degressiv steigend dem Gleichgewichtswert aus (22) nähert. Hier hat die Wachstumsrate des Kapitalstocks jene Höhe, daß die abnehmenden Grenzerträge durch den Fortschritt genau kompensiert werden. Trotz Hicksneutraler Erscheinungsform des technischen Fortschritts partizipiert wiederum wegen der Modellannahmen die Arbeit am steigenden technischen Wissen, da sich der gleichgewichtige Wachstumsprozeß bei ansteigenden Löhnen abspielt. Trotzdem ehemals Hicks-neutrale technische Entwicklung unterstellt wurde, bleiben im Gleichgewichtsstadium der Kapitalkoeffizient und die Grenzproduktivität des Kapitals konstant, denn der Fortschrittseffekt wird durch den von den Eigentümlichkeiten des Modells herbeigeführten Substitutionseffekt überdeckt. Der technische Fortschritt offenbart sich im neoklassischen Wachstumsmodell im Endergebnis immer als Harrod-neutral.

Wenn nun im Rahmen der Cobb-Douglas Funktion einerseits alle drei

Neutralitätsdefinitionen eine gleichartige Verschiebung der Produktionsfunktion herbeiführen, andererseits infolge der Prämissen des neoklassischen Modells immer eine Umwandlung des Fortschritts in die Harrod-neutrale Form erfolgt, dann kann auch jede unproportionale Effizienzerhöhung der Produktionsfaktoren in einen Hicks- und Harrod-neutralen Teil des wachsenden technischen Wissens aufgespalten werden. Anders ausgedrückt, jede unproportionale Produktivitätssteigerung läßt sich als eine Kombination von Hicks- und Harrod-Neutralität verstehen. Da demzufolge die Konstanz der Verteilung gewahrt bleibt, ist es auch weiterhin möglich, ein neoklassisches Gleichgewicht abzuleiten. Das ist am Beispiel der 'fixed production function' leicht nachzuweisen:

$$(23) \quad Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} = (K e^{bt})^{\alpha} (L e^{at})^{1-\alpha}.$$

Die Veränderung des Einkommens in der Zeit resultiert aus einer Variation des Arbeits- und Kapitaleinsatzes in der Zeit und ist deshalb durch das totale Differential aus (23) zu erhalten:

$$(24) \quad \frac{dY}{dt} = \alpha (K e^{bt})^{\alpha-1} (L e^{at})^{1-\alpha} \left(\frac{dK}{dt} e^{bt} + b e^{bt} K \right) + (1-\alpha) (L e^{at})^{-\alpha} (K e^{bt})^{\alpha} \left(\frac{dL}{dt} e^{at} + a e^{at} L \right).$$

Gleichung (24) durch (23) dividiert bestimmt die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens für alle möglichen Fälle neutralen Fortschritts:

$$(25) \quad \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{Y} = \alpha \cdot \frac{1}{K e^{bt}} \left(\frac{dK}{dt} e^{bt} + b e^{bt} K \right) + (1-\alpha) \frac{1}{L e^{at}} \left(\frac{dL}{dt} e^{at} + a e^{at} L \right).$$

Unter der Verwendung des Symbols w für die natürlichen Wachstumsraten ergibt sich aus (25):

$$(26) \quad w_Y = \alpha (w_K + b) + (1-\alpha) (w_L + a).$$

Die gleichgewichtige Wachstumsrate wird wiederum durch $z = w_Y = w_K$ gekennzeichnet:

$$(27) \quad z = \frac{\alpha b}{1-\alpha} + n + a = w_Y = w_K.$$

Bedingung (27) charakterisiert jenen neoklassischen Wachstumspfad, bei dem trotz unterschiedlicher Effizienzsteigerung eine gleichgewichtige Entwicklung des Volkseinkommens möglich ist. Die in den Gleichungen (20), (21) und (22) beschriebenen Gleichgewichtsraten lassen sich aus (27) ableiten, je nachdem welche Konstellation der Wachstumsraten von Arbeits- (a) und Kapitalproduktivität (b) zueinander besteht. In allen Fällen wird aber wiederum bei Konstanz der Verteilung und Übereinstimmung von w_Y und w_K der technische Fortschritt letztlich die Harrod-neutrale Erscheinungsform angenommen haben.

3.2.5. Die Bedeutung der Neutralität des technischen Fortschritts im Rahmen der neoklassischen Wachstumstheorie.

Die Neutralitätsdefinitionen garantieren eine bestimmte, gleichförmige Entwicklung der Einsätze an Arbeit und Kapital und kennzeichnen nicht-neutralen Fortschritt je nach Maßgabe der zu vergleichenden Punkte als arbeits- bzw. kapitalsparend. Diese Nicht-Neutralität geht mit einer Einkommensumverteilung einher und erweist sich somit für das neoklassische Modell als ungeeignet. Aber auch der bedenkenlosen Verwendung aller drei Neutralitätsdefinitionen im neoklassischen Modell sind dann Grenzen gesetzt, wenn eine andere Produktionsfunktion mit einer Substitutionselastizität von ungleich Eins der Untersuchung zugrundegelegt wird. Auch im Rahmen einer CES-Funktion mit $\sigma \neq 1$ gewährleisten die Neutralitätsdefinitionen als solche die Konstanz der Verteilung, nur sind sie jetzt nicht mehr miteinander vereinbar bzw. gegenseitig austauschbar, da unter der Annahme einer Substitutionselastizität von ungleich Eins verschiedene Produktionspunkte auf der gleichen Isoquante keine Konstanz der Verteilung implizieren. Anders ausgedrückt: Wenn auch die einzelnen Neutralitätsdefinitionen im Rahmen der CES-Funktion weiterhin Gültigkeit besitzen sollen, dann müssen die gemäß der Hicks-, Harrod- und Solow-Neutralität zu verwirklichenden Produktionspunkte sich in verschiedenen, sich einmal schneidenden Isoquantenschemata befinden. Die Verschiebung der Produktionsfunktion ist unter der Voraussetzung von $\sigma \neq 1$ nicht mehr gleichförmig, so daß nur noch Harrod-neutraler Fortschritt und neoklassisches Modell vereinbar sind. Die anderen Neutralitätsdefinitionen sind dagegen ungeeignet. Dies läßt sich für Hicks-neutralen Fort-

schritt im Rahmen einer CES-Funktion deutlich machen¹⁾. Die wachsende Effizienz läßt beide Faktoren in gleichem Prozentsatz produktiver werden, ohne daß dadurch bereits Substitutionseffekte und damit Verteilungsänderungen hervorgerufen werden. Dies geschieht erst durch das um den Prozentsatz des Fortschritts überproportional anwachsende Einkommen, denn in Verbindung mit der konstanten Sparquote induziert das eine Erhöhung der Wachstumsrate des Kapitals. Damit steigt auch die Kapitalintensität an. Der damit verbundene Substitutionsprozeß wird je nach $\zeta \geq 1$ die Verteilung zugunsten eines der Faktoren verschieben, d.h. aber auch über α und β die Wachstumsrate verändern; ein Gleichgewicht ist nie - oder nur bei $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ bzw. umgekehrt - möglich²⁾. Eine Konstanz der Entwicklung mit $w_Y = n + \frac{1}{\beta}$ (wenn λ die Hicks-neutrale Effizienzsteigerung bestimmt) ist offensichtlich nur denkbar, wenn sich die Sparquote proportional zur Produktivitätserhöhung vermindert³⁾. Gleichermäßen sind auch Solow-Neutralität und CES-Funktion im neoklassischen Modell unvereinbar.

Anders verhält es sich dagegen mit dem Harrod-neutralen Fortschritt, der sich nahtlos in den Prämissenkranz des Modells einfügt und der deshalb auch unter erschwerten Bedingungen einer CES-Funktion ein störungsfreies Wachstum ermöglicht⁴⁾. Entscheidend ist, daß der Fortschritt in der dem Harrodschen Kriterium zugrundeliegenden Verbreitungsform eine Verschiebung der Produktionsfunktion bei konstanter Kapitalproduktivität und unveränderter Grenzproduktivität des Kapitals hervorruft. Die Identität zwischen Arbeitswachstum und einer Erhöhung des technischen Wissens wird folglich im Rahmen einer CES-Funktion zu denselben Ergebnissen wie in 2.2. führen, die sich dort unter der Voraussetzung eines höheren Arbeitswachstums ergeben.

1) Ferguson, C.E., The Elasticity...a.a.O., S. 466 f.

2) derselbe, S. 469.

3) Vanek, J., A Theory of Growth with Technological Change, in: The American Economic Review, Vol. 57 I, 1967, S.76.

4) Hahn, F.H. and Matthews, R.C.O., The Theory...a.a.O., S. 52.

3.3. Gleichgewichtiges Wachstum und induzierter technischer Fortschritt.

Die bisherige Betrachtung vollzog sich unter der einschränkenden Annahme eines mit konstanter Rate wachsenden technischen Wissens, dessen Bestimmungsgründe nicht explizit in der dem Modell zugrundegelegten Produktionsfunktion aufgenommen wurden. Diese Annahme eines autonomen, wie Manna vom Himmel fallenden Fortschritts ist jedoch recht wirklichkeitsfremd, zumal dann, wenn infolge der Berücksichtigung des technischen Fortschritts eine gleichgewichtige Entwicklung nur in Verbindung mit einer ständigen Erhöhung der Kapitalintensität möglich ist. Diese Veränderung der Produktionsmethode kann nicht ohne Einfluß auf die Höhe des technischen Wissens bleiben, da die Durchführung neuer Produktionsmethoden in der Praxis den Beteiligten zusätzlich technische und organisatorische Kenntnisse verschafft, "so daß technischer Fortschritt von der Substitution der Arbeit durch das Kapital gefördert wird"¹⁾. Die Kapitalakkumulation wird damit selbst zu einer der Determinanten des technischen Fortschritts, d.h. im neoklassischen Modell ist der technische Fortschritt zumindest teilweise induziert. Entscheidend bleibt allerdings, wie die Beziehungen zwischen Fortschritt und Kapitalwachstum gestaltet sind.

Die Zunahme des technischen Wissens läßt sich nur durch die Erhöhung des Einkommens innerhalb eines gewissen Zeitraums messen. Die Abhängigkeit des Fortschritts von irgendwelchen Determinanten läßt sich formal in einer 'technical progress function'²⁾ folglich nur derart erfassen, daß eine Beziehung zwischen der Wachstumsrate des Einkommens und den auf den Fortschritt Einfluß nehmenden Variablen hergestellt wird (z.B. $w_Y = f(w_K)$). Eine derartige 'technical progress function' läßt sich beispielsweise aus (9) in 3.1. unter der Voraussetzung eines konstanten Arbeitseinsatzes ableiten:

$$(1) \quad w_Y = \lambda + \alpha w_K$$

So lange von einer gegenseitigen Beeinflussung von λ und w_K abgesehen wird, können hier die Auswirkung steigenden technischen Wissens und einer Erhöhung des Kapitalstocks eindeutig unterschieden

1) von Weizsäcker, C.Ch., Wachstum, Zins und optimale Investitionsquote, Basel und Tübingen 1962, S. 60.

2) Kaldor, N., A Model of Economic Growth, in: The Economic Journal, Vol. 67, 1957, S. 596.

werden. Durch Integration kann aus (1) jederzeit wieder die ihr zugrundeliegende (Cobb-Douglas) Produktionsfunktion gewonnen werden.

Wenn jedoch zwischen Kapitalakkumulation und technischem Fortschritt ein gegenseitiges Abhängigkeitsverhältnis, d.h. irgendeine funktionale Beziehung herrscht, dann sind die Zusammenhänge keineswegs so eindeutig. Wenn beispielsweise mit der Veränderung der Wachstumsrate des Kapitals eine nicht-lineare Veränderung des technischen Wissens einhergeht, dann kann eine Trennung von Fortschritts- und Kapitalakkumulationseffekt nicht mehr vorgenommen werden. Wenn also die 'technical progress function' keine Linearität impliziert, kann die ursprüngliche Produktionsfunktion nicht mehr durch Integration abgeleitet werden, da zwischen Kapitaleinsatz- und Einkommensveränderung Unstetigkeitsbereiche entstehen, die eine Integration unmöglich machen¹⁾. Eine derartige Hypothese des induzierten technischen Fortschritt ist aber nicht mit dem neoklassischen Modell vereinbar, da das System sich auf dem Vorhandensein einer Produktionsfunktion begründet.

Eine solche nicht-lineare 'technical progress function' bildet die Grundlage des Kaldorschen Wachstumsmodells. Die dieser Funktion zugrundeliegende Hypothese Kaldors geht davon aus, daß "any sharp or clear-cut distinction between the movement along a "production function" with a given state of knowledge and a shift in the "production function" caused by a change in the state of knowledge is arbitrary and artificial"²⁾. Als mögliche Verbindung von Fortschritt und Kapitalakkumulation nimmt Kaldor an, "that some increases in productivity would take place even if capital per man remained constant over time"³⁾, d. h. also, daß ein Teil des Fortschritts durchaus noch autonomen Charakter besitzen kann. Daneben existiert jener Teil des Fortschritts, der von der Wachstumsrate des Kapitals abhängig ist. Entscheidend für die Nicht-Linearität und damit für die Unbrauchbarkeit der Kaldorschen 'technical progress function' für das neoklassische Wachstumsmodell ist dabei die Prämisse, daß mit steigendem Kapitalwachstum zwar der Fortschritt ansteigt, daß jedoch "there is likely to be some maximum beyond which the rate of growth in productivity could not be raised, however fast capital is being accumulated"⁴⁾. Obwohl

1) Black, J., The Technical Progress Function and the Production Function, in: *Economica*, N.S. Vol. 29, 1962, S. 169.

2) Kaldor, N., *A Model...*a.a.O., S. 569.

3) ebenda.

4) ebenda.

Kaldor versucht, sich aus dem engen Rahmen der Grenzproduktivitätstheorie zu lösen, erscheinen doch durch diese Hintertüre die auch in der Neoklassik so wichtigen abnehmenden Grenzerträge (des Kapitals). Dadurch erhält die 'technical progress function' einen degressiven Verlauf und erlaubt keine mathematisch ableitbare Rückschlüsse auf die Produktionsfunktion. Da Kaldors Wachstumsmodell aus einem anderen Blickwinkel konstruiert wurde¹⁾, mag diese Hypothese der 'technical progress function' durchaus sinnvoll sein, auch wenn sie nicht in den Rahmen einer streng neoklassischen Analyse paßt.

Aber auch unter deren Annahmen läßt sich ein induzierter technischer Fortschritt einführen, der alle bisherigen Ergebnisse in bezug auf Gleichgewicht und Stabilität bestätigt. Den Weg hierzu hat von Weizsäcker²⁾ gewiesen. So lange die 'technical progress function' eine lineare Form beibehält, läßt sich daraus auch eine dem Modell zugrundezulegende Produktionsfunktion ableiten. Das beinhaltet jedoch keinen Verzicht auf einen von der Kapitalbildung abhängigen Fortschritt. In Gleichung (1) wäre das beispielsweise möglich, wenn mit dem Wachstum des Kapitals eine proportionale Effizienzsteigerung einhergeht, so daß die geforderte Linearität zwischen Kapitalakkumulation und Fortschritt - gemessen durch die Einkommenszunahme - besteht. Diese Zusammenhänge lassen sich durch die Annahme verdeutlichen, daß sich die gesamte Fortschrittsrate λ aus einem autonomen Teil a und einem von der Erhöhung der Kapitalintensität abhängigen Teil b zusammensetzt:

$$(2) \quad \lambda = a + b(w_K - w_L).$$

Hierbei sei angenommen, daß sich diese Formulierung auf die (für den neoklassischen Gleichgewichtspfad typische) Konstellation $w_K > w_L$ bezieht, da eine Senkung der Kapitalintensität zu bereits früher angewandten Arbeitsmethoden führt, die gerade wegen ihrer mangelnden Unproduktivität aufgegeben wurden³⁾. Überträgt man den aus (2) erhältlichen Wert der Fortschrittsrate in die tatsächliche Wachstumsrate des Einkommens

$$(3) \quad w_Y = \lambda + \alpha w_K + (1-\alpha) \eta$$

1) Oppenländer, K., Die moderne Wachstumstheorie, a.a.O., S. 189/90.

2) von Weizsäcker, C.Ch., Wachstum...a.a.O., S. 60.

3) ebenda.

so folgt hieraus bei durch Kapitalakkumulation induzierten Fortschritt die Höhe der tatsächlichen Wachstumsrate des Einkommens als

$$(4) \quad w_Y = a + (1-\alpha-b)n + (\alpha+b)w_K.$$

Hieraus läßt sich durch Integration nach t die ursprüngliche Produktionsfunktion ableiten¹⁾:

$$(5) \quad \int \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{Y} = \int a + (1-\alpha-b) \int \frac{dL}{dt} \cdot \frac{1}{L} + (\alpha+b) \int \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K}$$

$$\ln Y = at + (1-\alpha-b) \ln L + (\alpha+b) \ln K + \ln N.$$

Die Integrationskonstante N ist ein beliebig zu wählender Wert und kann deshalb auch durch $\ln N$ beschrieben werden. Wird (5) aufgelöst, wobei zu beachten ist, daß $e^{\ln x} = x$ ist, so ergibt sich:

$$e^{\ln Y} = e^{at} \cdot e^{(1-\alpha-b) \ln L} \cdot e^{(\alpha+b) \ln K} \cdot e^{\ln N}$$

Da $e^{XY} = (e^X)^Y$, folgt für die endgültige Gestalt der Produktionsfunktion:

$$(6) \quad Y = N e^{at} \cdot L^{1-\alpha-b} \cdot K^{\alpha+b}$$

Die Cobb-Douglas Funktion wird also beibehalten. Der induzierte technische Fortschritt verändert um seinen Parameter die Einkommensverteilung zugunsten des Kapitals. Das ist nur das äußere Zeichen dafür, daß das Kapital einen um b höheren Beitrag zum Einkommen liefert, wenn der Kapitalstock über das Arbeitswachstum hinaus erhöht wird, da hierdurch Effizienzsteigerungen gemäß b frei werden. Die Abhängigkeit des Fortschritts von der Kapitalintensität und der Zeit in (6) wird offensichtlich, wenn die neue Produktionsfunktion (6) der in 3.1. zugrundegelegten Funktion (3) gleichgesetzt wird. λ wird demnach beschrieben durch

$$\lambda K^\alpha L^{1-\alpha} = N e^{at} \cdot L^{1-\alpha-b} \cdot K^{\alpha+b}$$

1) von Weizsäcker, C. Ch., Wachstum,...a.a.O., S. 61.

$$(7) \quad \lambda = Ne^{at} \left(\frac{K}{L} \right)^b \quad 1).$$

Die Fortschrittsrate bildet sich aus dem zeitabhängigen autonomen technischen Wissen und dem durch die Höhe der Kapitalintensität induzierten Wissen. Die neoklassische Wachstumstheorie ist unter diesen Annahmen durchaus mit induziertem Fortschritt vereinbar. Die gleichgewichtige Wachstumsrate wird abermals nur bei Konstanz der Kapitalproduktivität, d.h. bei Übereinstimmung von w_Y und w_K zu verwirklichen sein:

$$(8) \quad z = \frac{a}{1-\alpha-b} + n = w_Y = w_K.$$

Ob die störungsfreie Wachstumsrate des Einkommens bei gleichem Wert für n in (11) aus 3.1. größer ist als bei autonomen Fortschritt hängt natürlich vom Größenverhältnis zwischen a , b und λ ab. Nur wenn der autonome Fortschritt in beiden Fällen gleich ist ($a = \lambda$), wird nach (8) das Einkommen eine höhere Gleichgewichtsrate erreichen.

Liegt überhaupt kein technischer Fortschritt vor, der autonom determiniert ist, so geht (8) bei konstantem Arbeitseinsatz über in

$$(9) \quad w_Y = (\alpha + b) w_K$$

Da die Konstanz des Wachstums die Übereinstimmung von w_Y und w_K verlangt, ist jetzt das Gleichgewichtswachstum unbestimmt²⁾, denn $\alpha + b$ müssen dazu notwendigerweise gleich Eins sein. In Gleichung (6) weist der Bruch bei $n=0$ dann jedoch im Zähler und Nenner eine Null auf. Das Wachstum ist eine direkte Funktion der Wachstumsrate des Kapitals, d.h. wie bei Harrod eine Funktion der Sparquote und des Kapitalkoeffizienten.

Wenn technisches Wissen und Kapitalbildung derart korrelieren, so muß die Ausbreitung des steigenden technischen Wissens über den gesamten Kapitalstock als eine wirklichkeitsfremde Vereinfachung angesehen werden. Es ist vielmehr anzunehmen, daß sich die höhere Produktivität stets nur in den neu in Betrieb genommenen Anlagen verkörpern kann. Das Niveau des technischen Wissens im Zeitpunkt

1) von Weizsäcker, C.Ch., Wachstum,...a.a.O., S. 62.

2) Riese, H., Gleichgewichtiges Wachstum und optimales Wachstum in der neoklassischen Wachstumstheorie, in: Kyklos, Bd. 17, 1964, S. 49.

der Durchführung der Investition kann nur in den neuen Anlagen zum Ausdruck kommen, nicht jedoch in den Teilen des Kapitalstocks, die in Zeitpunkten geringeren technischen Wissens erstellt wurden. Im folgenden soll deshalb der kapitalgebundene technische Fortschritt in den Vordergrund der Analyse rücken, d.h. die Umsetzung vorhandenen technischen Wissens in die ökonomische Realität betrachtet werden. Aus Gründen der Klarheit sei es gestattet, dabei wieder auf den autonomen technischen Fortschritt zurückzugreifen.

3.4. Neoklassisches Wachstum und kapitalgebundener technischer Fortschritt.

Die bisherige Analyse des neoklassischen Wachstumsprozesses unter Berücksichtigung des technischen Fortschritts vollzog sich, ohne daß die Art der Verbreitung bzw. die Umsetzung des wachsenden technischen Wissens eine Erklärung fand.

Im folgenden soll deshalb der möglichen Konkretisierung der technischen Entwicklung und der daraus erwachsenden Einflüsse das Hauptaugenmerk zugewandt werden. Bisher schien es, "as if workers in a cheese factory wake up one morning, walk into the same factory they had left the afternoon before, and find that they now know a clever way to produce more cheese"¹⁾. Eine solche Produktionssteigerung bei gleichen Kosten - und so ist der technische Fortschritt ja definiert - ist allerdings nur möglich, wenn sich entweder die Produktivität der Arbeit z.B. durch einen Lernprozeß erhöht hat und/oder bessere, produktivere Maschinen zur Verfügung stehen. Eine Veränderung in der technischen Konzeption der Käseherstellung kann sich im Produktionsprozeß also nur durch modernere Anlagen bemerkbar machen. Eine Erfindung als solche ist noch nicht produktivitätserhöhend; um in die wirtschaftliche Praxis eingeführt werden zu können, müssen erst die entsprechenden Maschinen gebaut werden, die das neue Produktionsprinzip verkörpern oder ihm angepaßt sind²⁾. Eine absolute Unabhängigkeit von technischem Fortschritt, Arbeitseffizienz und Kapitalstock anzunehmen, scheint fragwürdig, der Realität näher steht sicherlich eine Verbindung von Effizienzsteigerung des Produktionsprozesses und Kapitalintensivierung³⁾. Einerseits kann diese Verbindung zur Klärung des autonomen Charakters des Fortschritts herangezogen werden, zum anderen gestattet sie aber auch eine Verdeutlichung der Umsetzung des technischen Wissens in der Realität, denn nur in neuen Investitionen kann sich das gewachsene Wissen verwirklichen. Der technische Fortschritt ist direkt an das Kapital gebunden⁴⁾, er verkörpert sich darin ('embodied technical progress'). Zwar fällt er damit gleichfalls noch wie Manna vom Himmel, jedoch nur auf die zu die-

1) Solow, R.M., Capital Theory...a.a.O., S. 41

2) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen Theorie des technischen Fortschritts, Göttingen 1966, S. 14.

3) Elsner, K., Wachstums- und...a.a.O., S. 286.

4) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen...a.a.O., S. 14.

sem Zeitpunkt in Betrieb genommene Maschine¹⁾, so daß nicht "old and new capital equipment participate equally in technical change".²⁾ Der in der Zeit konstante Fortschritt findet damit seine Verbreitung in der wirtschaftlichen Praxis durch die in jedem Zeitpunkt stattfindende Investition, sein Charakter ist kapitalgebunden. Diese Überlegung impliziert eine Reihe von Problemen, die z.T. eine Modifizierung der bisherigen Ansätze notwendig macht, obwohl weiterhin die für das neoklassische Modell typischen Annahmen Gültigkeit besitzen.

3.4.1. Die aus der Verwendung kapitalgebundenen technischen Fortschritts für die Wachstumstheorie entstehenden Probleme.

In jedem Zeitpunkt des Wachstumsprozesses bewirkt der konstante Fortschritt den Einsatz immer effizienterer Anlagen. Der Installationszeitpunkt und damit auch das Alter bereits in Betrieb befindlicher Anlagen tritt als neue Variable neben die herkömmlichen hinzu, denn der Altersaufbau des Kapitalstocks ist das äußere Zeichen seiner tatsächlichen Produktivität. Alle Modelle mit 'embodied technical progress' werden deshalb in der anglo-amerikanischen Literatur auch als 'vintage-models' (Jahrgangs-, Baujahr-Modelle) bezeichnet³⁾. Da nun der Zuwachs zum Kapitalstock, d.h. die in jedem Zeitpunkt des Wachstumsprozesses vorgenommene Investition ständig höhere Effizienz verkörpert, muß eine wesentliche Vereinfachung der bisherigen Analyse aufgegeben werden: die Homogenität des Kapitalstocks. Von nun an besteht der zur Produktion eines bestimmten Einkommens zur Verfügung stehende Kapitalstock aus heterogenen Kapitaleinheiten bzw. Maschinenjahrgängen unterschiedlicher Produktivität. Diese Tatsache wird sich natürlich erschwerend auf die Konstruktion einer gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion über alle Jahrgänge hinweg auswirken.

In irgend einem Zeitpunkt t tragen also Anlagen der Jahrgänge t , $t-1$, $1-2 \dots 1-n$ zur Produktion bei. Der Betrachtungszeitpunkt gewinnt damit wesentlich an Bedeutung. Mit der Unterscheidung heterogener Maschinenjahrgänge kann schlecht die bisher übliche Annahme eines unendlich langen Verbleibens der Anlagen im Produktions-

1) Hahn, F.H. and Matthews, R.C.O., The Theory...a.a.O., S. 59.

2) Solow, R.M., Investment and Technical Progress, in: Mathematical Methods in the Social Sciences 1959, Stanford 1960, S. 91.

3) Verg. z.B.: Allen, R.G.D., Macro-Economics...a.a.O., S. 261 f.

prozeß aufrechterhalten bleiben. Die tatsächliche Nutzungsdauer einer Anlage wird ja durch ihre Rentabilität bestimmt, die mit sinkender Effizienz - gemessen an neu installierten Jahrgängen - immer geringer wird. Das Ausscheiden einer Maschine kann auf zweierlei Art im Modell berücksichtigt werden: einmal aufgrund einer physischen Abnutzung durch eine exponentielle Abschreibung mit der Rate δ , zum anderen auch aufgrund zu geringer Rentabilität, die ein Verschrotten der Maschine notwendig macht. Letzteres, als ökonomische Lebensdauer T bezeichnet, wird von übergeordneter Bedeutung sein, da meist von der Annahme ausgegangen werden kann, daß eine Maschine infolge Unrentabilität aus dem Produktionsprozeß gezogen wird, obwohl sie physisch durchaus noch einsatzfähig ist.

Die Bestimmung der ökonomischen Lebensdauer T wird unter der Berücksichtigung von kapitalgebundenem Fortschritt zum wesentlichsten Problem, da ihre Größe für die Höhe und Wachstumsrate aller anderen Variablen mitentscheidend ist. Die Lebensdauer T kann einerseits formal-technisch als Parameter behandelt werden, zum anderen aber auch als eine ökonomische Variable, die durch das unternehmerische Verhalten determiniert wird. Beide Möglichkeiten sollen im folgenden genutzt werden, wobei allerdings schon hier darauf hinzuweisen ist, daß die Verwendung von T als Parameter zum Nachweis des gleichgewichtigen Wachstums vollauf genügt. Die Zurückführung von T auf unternehmerisches Verhalten offenbart jedoch darüber hinaus eine Reihe interessanter ökonomischer Implikationen.

3.4.2. Die verschiedenen Ansatzpunkte der Vintage-Modelle.

Der autonome technische Fortschritt wirkt sich auf Investitionen, d.h. einzelne Maschinenjahrgänge nur in deren Installationszeitpunkt t aus. Später, also in $t+1$, $t+2$... $t+n$, bleibt er ohne weiteren Einfluß. Vom dem in $t+1$ höheren technischen Wissen ziehen die in t errichteten Anlagen keinen Nutzen.

Vollzieht sich der Produktionsprozeß wiederum nur mit Hilfe zweier Faktoren, so hängt der Output Q_v einer Maschine (bzw. aller Maschinen des Jahrgangs v) allein von den Einsätzen in $t=v$ an Arbeit L_v und Kapital K_v ab:

$$(1) \quad Q_v = F(K_v, L_v).$$

Diese Funktion möge wiederum linear-homogen sein. Allerdings eröffnet sich jetzt ein neues Problem: inwieweit gilt die zum Installationszeitpunkt bestehende Produktionsfunktion für später zurückliegende Zeitpunkte $t > v$. Dabei handelt es sich weniger um die Form der Funktion - diese sei immer linear-homogen -, als vielmehr um das mögliche Einsatzverhältnis der Faktoren zueinander. Besteht für den Installationszeitpunkt $t=v$ für jeden Jahrgang die übliche Cobb-Douglas Funktion:

$$(2) \quad Q_v = e^{\lambda v} K_v^\alpha \cdot L_v^{1-\alpha},$$

so überläßt diese dem Unternehmer die freie Wahl der Produktionsmethode, d.h. der Kapitalintensität. Der den technischen Fortschritt repräsentierende Faktor $e^{\lambda v}$ erscheint nur für den Planungszeitraum. Mit Errichtung der Maschine verschwindet er und kommt allein in der Effizienz der Anlagen zum Ausdruck¹⁾. Gilt nun auch für die gesamte Lebensdauer einer Anlage diese Cobb-Douglas Funktion, so impliziert dies eine immerwährende Substitutionsmöglichkeit auch an den bereits länger genutzten Maschinen. Möglich ist jedoch auch, daß nach einmal erfolgter Wahl der Kapitalintensität das Faktoreinsatzverhältnis nicht mehr geändert werden kann. Andererseits kann auch vor dem Installationszeitpunkt dieses fixe Einsatzverhältnis bereits vorgegeben sein, so daß sich der Unternehmer einer Produktionsfunktion

$$(3) \quad Q_v = \text{Min}(L_v, K_v)$$

gegenübersieht, die ihm von Anfang an die Produktionsmethode vorschreibt.

Diese Überlegungen zur Produktionsfunktion vor und nach dem Installationszeitpunkt machen drei Modellfälle möglich:

- a) vor und nach Errichtung eines Maschinenjahrgangs bleibt den Unternehmern die Wahl der Kapitalintensität offen,
- b) nur vor dem Installationszeitpunkt kann der Unternehmer sein

1) Solow, R.M., Investment and...a.a.O., S. 91/92.

Kapital-Arbeits-Einsatzverhältnis frei bestimmen, danach ist es für die gesamte Lebensdauer des Maschinenjahrgangs festgelegt, c) der Unternehmer hat überhaupt keine Wahlmöglichkeit, die optimale Kapitalintensität ist ihm vorgegeben. Bei rationalem Verhalten wird er diese wählen.

Dies sind die drei grundsätzlichen Ansätze für Vintage-Modelle, die sich demnach nach der Substitutionsmöglichkeit der Faktoren unterscheiden. Im Fall a) herrscht ex-ante und ex-post Substitutionalität, in b) ex-ante Substitutionalität und ex-post Limitationalität und in c) ex-ante und ex-post Limitationalität¹⁾. Phelps hat hier eine vor allem in der anglo-amerikanischen Literatur Verwendung findende Formulierung geprägt, die sich an die Verformbarkeit von Kitt ('putty') und gebranntem Ton ('clay') anlehnt²⁾. So unterscheidet er die drei Fälle a) putty-putty, b) putty-clay und c) clay-clay.

Allen drei Fällen gemeinsam ist der inhomogene Kapitalstock als Folge des kapitalgebundenen technischen Fortschritts und die zeitlich beschränkte Existenz der Maschinenjahrgänge, deren Lebensdauer eine mitentscheidende Auswirkung auf das Niveau und das Gleichgewicht des Wachstumsprozesses besitzen.

1) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen...a.a.O., S. 15.

2) Phelps, E.S., Substitution, Fixed Proportions, Growth, and Distribution, in: The International Economic Review, Vol. 4, 1963, S. 265 f.

3.5. Der putty-putty Vintage-Fall.

Dieser Fall neoklassischen Wachstums unter der Voraussetzung kapitalgebundenen technischen Fortschritts ist dem Modell mit 'disembodied technical progress' am ähnlichsten, denn Arbeit und Kapital sind während des Wachstumsprozesses voll substituierbar. Der Untersuchungsgang sei dergestalt - und das gilt auch für die anderen Fälle -, daß vor die gesamtwirtschaftliche Betrachtung die Analyse der Entwicklung eines Maschinenjahrgangs und die Aufdeckung der damit verbundenen Implikationen gestellt wird.

3.5.1. Die Entwicklung des einzelnen Maschinenjahrgangs.

Vereinfachend sei anfangs von der Annahme einer unendlichen physischen Lebensdauer der Anlagen ausgegangen. Der Ausschluß irgendwelcher Prämissen über die Abschreibung hat unzweifelhaft den Vorteil, die durch den Embodiment-Effekt - d.h. durch die Wirkung kapitalgebundenen technischen Fortschritts - hervorgerufenen Veränderungen des Modells klarer herauszustellen. In späterem Zusammenhang soll auch ein Vintage-Modell unter Miteinbeziehung einer exponentiellen Abschreibung dargestellt werden.

Die Benutzung der Cobb-Douglas Funktion für den einzelnen Anlagenjahrgang hat den Vorteil, daß die Form des als neutral angenommenen Fortschritts ohne Bedeutung ist. Das erlaubt die synonyme Verwendung von Harrod-neutraler und Solow-neutraler Erscheinungsform des technischen Wissens, da sich der dem Modell näherliegende Solow-neutrale Fortschritt - der Embodiment-Effekt erhöht ja die Effizienz des Kapitals - in den leichter zu handhabenden Fall des Harrod-neutralen Fortschritts umwandeln läßt¹⁾. Der technische Fortschritt verlangt aus der Sicht der Harrod-Neutralität die Konstanz des Kapitalkoeffizienten und äußert sich in einer ständigen Erhöhung der Grenzproduktivität der Arbeit. Da die Annahmen der Grenzproduktivitätstheorie weiterhin Gültigkeit besitzen, ist das gleichbedeutend mit einer gemäß der Fortschrittsrate einhergehenden Lohnerhöhung. Umgekehrt bedeutet eine konstant zunehmende Produktivität neuer Anlagen eine fortwährende Steigerung der Effizienz der daran beschäftigten Arbeit, also wiederum eine Zunahme des Lohnes. Ist die Arbeit, wie angenommen, homogen, so muß innerhalb

1) Vergl. S. 116, Gleichung (15).

der gesamten Volkswirtschaft ein einheitlicher Lohnsatz herrschen, der sich nach der Arbeitsproduktivität an der zuletzt installierten Maschine richtet. Diesem ständig steigenden Lohn kommt im Modell eine wesentliche Bedeutung als Steuerungsmechanismus zu. Der Output einer Maschine bzw. eines Maschinenjahrgangs des Baujahres v wird im Betrachtungszeitpunkt $t=v$ durch die Cobb-Douglas Funktion (2) aus 3.4.2. determiniert, in der die Fortschrittsrate λ durch den Term für die Harrod-Neutralität ersetzt werden kann:

$$(1) \quad Q_v(t) = e^{m(1-\alpha)v} K_v^\alpha L_v^{1-\alpha}(t)$$

Der Kapitalstock K_v , der in $t=v$ installiert wurde, besitzt eine unendliche Lebensdauer, d.h. K_v bleibt auch für alle späteren Zeitpunkte $t>v$ konstant. Aber gemäß der für alle Zeiten gültigen Cobb-Douglas Funktion (1) ist sowohl im als auch nach dem Installationszeitpunkt eine Substitution der Faktoren möglich. Der technische Fortschritt, gewachsen um die Harrod-neutrale Rate $m(1-\alpha)$, verkörpert sich allein im Kapitaleinsatz K_v . Das höhere technische Wissen zukünftiger Perioden bleibt dagegen auf K_v ohne Einfluß. Auch die Zahl der Maschinen K_v ist während der weiteren Lebensdauer unverändert¹⁾, solange keine physische Abnutzung zustandekommt.

Die Zahl der Maschinen K_v ist in ihrer absoluten Bestimmung durch eine dem Betrachter überlassene Maßstabswahl (z.B. in Hunderten oder in einzelnen Einheiten) festzulegen. Aus Vereinfachungsgründen bietet sich jene Einheit an, die ebensoviel wie eine Einheit des Outputs kostet, so daß der Preis der neuen Maschine gleich einer Outputeinheit, d.h. gleich Eins ist. Eine Maschine, gleich einer Einheit, entspricht folglich dem Preis des produzierten Gutes, ausgedrückt in realen Einheiten des Outputs.

Durch die ex-post mögliche Substituierbarkeit der Faktoren gewinnt der in der Zeit steigende Lohn entscheidenden Einfluß auf die Anzahl der Arbeitskräfte, die am einzelnen Maschinenjahrgang beschäftigt werden. Entsprechend der Gewinnmaximierungsbedingung ist es nur lohnend, so lange Arbeitskräfte einzusetzen, bis eine Übereinstimmung zwischen realem Faktorpreis und Grenzproduktivität besteht. Der in der Zeit steigende Lohn trägt folglich zu einer ständigen Verminderung der ehemals in $t=v$ eingesetzten Arbeitskräfte

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 238.

bei und bestimmt somit die in jedem Augenblick an der Maschine optimale Kapitalintensität. Mit verändertem L-Einsatz muß jedoch auch der Output variieren. Deshalb sind in (1) L und Q mit dem Zeitindex t versehen.

Wenn im Zeitpunkt der Installation der Anlage Lohn und Grenzproduktivität der Arbeit übereingestimmt haben, dann gilt:

$$(2) \quad \frac{\partial Q_v(t)}{\partial L_v(t)} = l(t) \quad t \geq v.$$

Diese Bedingung ist natürlich auch für spätere Zeitpunkte, d.h. wenn die Anlage mehrere Jahre in Betrieb ist, gültig. Da der Lohn dann jedoch entsprechend der Wachstumsrate des technischen Fortschritts angestiegen ist, muß am Maschinenjahrgang v eine Freisetzung von Arbeitskräften stattgefunden haben, denn nur so ist die notwendige Erhöhung der Grenzproduktivität der Arbeit möglich. Aus der Produktionsfunktion (1) folgt für die Grenzproduktivität durch partielle Ableitung nach L:

$$(3) \quad (1-\alpha) \frac{Q_v(t)}{L_v(t)} = \frac{\partial Q_v(t)}{\partial L_v(t)} = l(t) \quad t \geq v.$$

Die Höhe des Lohnes $l(t)$ bestimmt folglich bei konstanter Produktionselastizität die Höhe des Outputs und des Arbeitseinsatzes und zwar in jedem Augenblick während und nach dem Installationszeitpunkt. Für den Jahrgang v muß während des gesamten (theoretisch unendlich langen) Produktionsprozesses eine kontinuierliche Erhöhung von $Q_v(t)/L_v(t)$ vonstattengehen, wobei allerdings der absolute Output und Arbeitseinsatz immer geringer werden.

Die Abhängigkeit der Produktion und des Arbeitseinsatzes vom jeweiligen Lohn läßt sich leicht mit Hilfe von (1) und (3) ableiten.

Zur Bestimmung des Outputs Q_v im Zeitpunkt t sei (1) folgendermaßen umformuliert:

$$\begin{aligned} Q_v(t)^\alpha \cdot Q_v(t)^{1-\alpha} &= e^{m(1-\alpha)v} \cdot K_v^\alpha \cdot L_v(t)^{1-\alpha} \\ Q_v(t)^\alpha &= e^{m(1-\alpha)v} \cdot K_v^\alpha \cdot \left[\frac{Q_v(t)}{L_v(t)} \right]^{-(1-\alpha)} \\ Q_v(t)^\alpha &= e^{m(1-\alpha)v} \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha} \cdot \left[(1-\alpha) \frac{Q_v(t)}{L_v(t)} \right]^{-(1-\alpha)} \cdot K_v^\alpha \\ Q_v(t)^\alpha &= e^{m(1-\alpha)v} \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha} \cdot l(t)^{-(1-\alpha)} \cdot K_v^\alpha \end{aligned}$$

$$Q_v(t) = e^{\frac{m(1-\alpha)v}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \ell(t)^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}} \cdot K_v.$$

Da nun $m(1-\alpha)/\alpha$ der Solowschen Formulierung neutralen Fortschritts entspricht, hier kurz als m' bezeichnet, hat $Q_v(t)$ eine endgültige Höhe von:

$$(4) Q_v(t) = e^{m'v} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \ell(t)^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}} \cdot K_v^{(1)}.$$

Der negative Exponent $(1-\alpha)$ bringt zum Ausdruck, daß die Ausbringung des Maschinenjahrgangs mit steigenden Löhnen abnehmen muß. Die inverse Beziehung zwischen Arbeitseinsatz und Lohnhöhe läßt sich durch die partielle Ableitung von (1) nach $L_v(t)$ gewinnen:

$$\frac{\partial Q_v(t)}{\partial L_v(t)} \cdot \ell(t) = e^{m(1-\alpha)v} \cdot K_v^\alpha (1-\alpha) L_v(t)^{1-\alpha} \cdot L_v(t)^{-1}$$

$$\ell(t) = e^{m(1-\alpha)v} (1-\alpha) \frac{K_v^\alpha}{L_v(t)^\alpha}$$

$$L_v(t)^\alpha = e^{m(1-\alpha)v} (1-\alpha) \ell(t)^{-1} \cdot K_v^\alpha$$

$$L_v(t) = e^{\frac{m(1-\alpha)v}{\alpha}} \ell(t)^{-\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot K_v$$

$$(5) L_v(t) = e^{m'v} \ell(t)^{-\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot K_v^{(2)}.$$

Nach Maßgabe des negativen Exponenten des Lohnes wird demnach der Arbeitseinsatz auf unterschiedliche Lohnhöhen reagieren. In den Gleichungen (4) und (5) sind definitionsgemäß alle anderen Variablen für den einzelnen Maschinenjahrgang konstant. Die offensichtlich quantitativ verschiedenartige Verminderung von Output und Arbeitseinsatz ist leicht zu erklären: da $\frac{1}{\alpha}$ für $\alpha < 1$ eine größere Reaktion als $-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}$ verlangt, muß bei höheren Lohnsätzen der Arbeitseinsatz verhältnismäßig stärker zurückgehen als der Output. Diese Reaktion ist der zugrundegelegten Produktionsfunktion zuzuschreiben, die abnehmende Grenzerträge unterstellt. Die Reihenfolge der Wirkungen macht das deutlich: ein gestiegener Lohn führt zu geringerem Arbeitseinsatz, dieser kleinere Einsatz an Arbeit läßt zwar den Output sinken, aber wegen der abnehmenden Grenzerträge nur unterproportional.

Alle diese Ergebnisse beziehen sich auf jeden einzelnen Maschinen-

1) Allan, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 284.

2) ebenda.

jahrgang: Die Produktionsmethode richtet sich in jedem Betrachtungszeitpunkt nach dem dann herrschenden Lohn. Wegen der weiterhin bestehenden Substituierbarkeit der Faktoren ist es den Unternehmern möglich, durch Freisetzen von Arbeit die für den einzelnen Jahrgang optimale Kapitalintensität einzuhalten.

3.5.2. Die Ausdehnung der Betrachtung auf alle in Betrieb befindliche Jahrgänge.

Da die bisherigen Folgerungen für alle Maschinenjahrgänge Gültigkeit besitzen, denn überall und zu jedem Zeitpunkt ist die Produktionsfunktion von der Gestalt (1), und da gleichzeitig bei vollständiger Konkurrenz ein einheitlicher Lohn für den homogenen Faktor Arbeit herrschen muß, läßt sich leicht der Übergang vom einzelnen Maschinenjahrgang zur Gesamtbetrachtung unter Einschluß aller bis zu diesem Augenblick durchgeführten Investitionen vollziehen. In jedem Zeitpunkt t ergibt sich der gesamte Output als Summe der Ausbringungen sämtlicher zu diesem Zeitpunkt in Betrieb befindlichen Maschinenjahrgänge K_v für v von t bis $-\infty$, da eine endliche Lebensdauer infolge unendlicher physischer Haltbarkeit bei gleichzeitig unendlich vielen Substitutionsmöglichkeiten nicht zustandekommen kann. Das gleiche gilt auch für die beschäftigte Arbeit, die bei dem bestehenden Lohn $l(t)$ nachgefragt wird. Durch Aggregation lassen sich aus den Gleichungen (4) und (5) das gesamte Einkommen und die gesamte eingesetzte Arbeit bestimmen:

$$(6) \quad Q(t) = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot l(t)^{-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{m'v} K_v dv$$

$$(7) \quad L(t) = (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot l(t)^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{m'v} K_v dv$$

Wenn in jedem Augenblick an jedem Maschinenjahrgang das dort herrschende Grenzprodukt der Arbeit mit dem Lohn übereinstimmen muß, dann wird auch die gesamtwirtschaftliche Grenzproduktivität der Arbeit die Höhe $l(t)$ besitzen. Damit ist aber der Lohn bei einer für alle Jahrgänge gleichen und konstanten Produktionselastizität der Arbeit für die Höhe der gesamtwirtschaftlichen Arbeitsproduktivität verantwortlich. Das wird sofort deutlich, wenn $Q(t)$ aus (6) durch $L(t)$ aus (7) dividiert wird:

$$(8) \quad \frac{Q(t)}{L(t)} (1-\alpha) = l(t).$$

Das gesamte Einkommen, der gesamte Arbeitseinsatz und die Lohnhöhe werden nur durch die Zeit t beeinflusst. Zur Bestimmung der gesamtwirtschaftlichen Grenzproduktivität der Arbeit ist ohne den Umweg über den Lohn die Kenntnis einer gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion notwendig. Ihre Konstruktion mit Hilfe eines einfachen Aggregationsverfahrens stößt jedoch auf die Schwierigkeit der heterogenen Kapitaleinheiten.

3.5.3. Die Aggregation des Kapitalstocks und die Ableitung einer gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion.

Der Kapitalstock setzt sich aus den einzelnen Maschinenjahrgängen mit unterschiedlicher Effizienz zusammen, so daß eine etwa rein zahlenmäßige bzw. mengenmäßige Addition aller K_v von $-\infty$ bis t :

$$(9) \quad N(t) = \int_{-\infty}^t K_v dv$$

zwar die Menge aller verwendeten Maschinen angibt, jedoch wegen der unterschiedlichen Produktivität keine adäquate Lösung darstellt. Wegen des Embodiment-Effektes zählen die neueren Maschinen stärker, ihr Beitrag zum Gesamtprodukt ist anteilmäßig größer als der der älteren Jahrgänge¹⁾.

Der Summe aller Maschinen muß eine Gewichtung beigegeben werden, die dieser Inhomogenität Rechnung trägt. Um den Kapitalstock als gewichtete Summe der Zahl der Maschinen darstellen zu können, bietet sich offensichtlich der durch den Effizienzparameter m' dem einzelnen Jahrgang zugebilligte technische Fortschritt an. Für jeden Jahrgang K_v beträgt das entsprechende Gewicht somit $e^{m'v}$ ²⁾. Die rein mengenmäßige Betrachtung des Kapitalstocks wird unter Verwendung des Solow-neutralen Fortschritts in eine Bemessung mit Hilfe von Effizienzeinheiten überführt. In Effizienzeinheiten gemessen, wird folglich in einem Zeitpunkt v die Menge $K_v e^{m'v} = \bar{K}_v$ an Kapitaleinheiten investiert. Die durch Aggregation erhältliche Größe des gesamten Kapitalstocks lautet folglich:

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 285

2) Massel, B.F., Investment, Innovation, and Growth, in: *Econometrica*, Vol. 30, 1962, S. 244.

$$(10) \quad \bar{K}(t) = \int_{-\infty}^t \bar{K}_v dv + \int_{-\infty}^t e^{mv} K_v dv \quad 1).$$

Dieser in Effizienzeinheiten gemessene Kapitalstock wird den rein zahlenmäßigen $N(t)$ aus (9) bei weitem überschreiten. Der Ausdruck (10) wurde bereits formal zur Feststellung der Gesamtgrößen $Q(t)$ und $L(t)$ verwendet. Unter Benutzung von (10) in (6) und (7) folgt daraus:

$$(11) \quad Q(t) = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot L(t)^{-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} \cdot \bar{K}(t)$$

$$(12) \quad L(t) = (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot L(t)^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \bar{K}(t)$$

Unter Eliminierung von $L(t)$ läßt sich aus den Gleichungen (11) und (12) eine erste gesamtwirtschaftliche Produktionsfunktion formulieren²⁾:

$$Q(t)^{-\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha} \bar{K}(t)^{\alpha} = L(t)^{1-\alpha}$$

$$\text{aus (11)} \quad Q(t)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \bar{K}(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = L(t)$$

$$L(t) (1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \bar{K}(t)^{-1} = L(t)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\text{aus (12)} \quad L(t)^{-\alpha} (1-\alpha) \bar{K}(t)^{\alpha} = L(t)$$

$$Q(t)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha) \bar{K}(t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = L(t)^{-\alpha} (1-\alpha) \bar{K}(t)^{\alpha}$$

$$Q(t)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \bar{K}(t)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \bar{K}(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{\alpha}$$

$$(13) \quad Q(t) = \bar{K}(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$$

Diese Produktionsfunktion für die gesamte Wirtschaft muß zwangsläufig wiederum von der Cobb-Douglas Form sein, nur daß sie eben die Faktoreinsätze in Effizienzeinheiten bemißt.

Die Verwendung von Effizienzeinheiten gestattet noch eine andere Formulierung des aggregierten Kapitalstocks. Da die zugrundeliegende Produktionsfunktion die synonyme Verwendung von Harrod- und Solow-Neutralem Fortschritt erlaubt, kann auch die höhere Effizienz der Arbeit zugerechnet werden, d.h. neben einem Kapitalstock in

1) Phelps, E.S., The New View of Investment: A Neoclassical Analysis, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 76, 1962, S. 552.

2) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 285.

natürlichen Einheiten geht in die Produktionsfunktion die in Produktivitätseinheiten gemessene Arbeit ein. Das wird deutlich, wenn aus Gleichung (10) der zahlenmäßige Kapitalstock K_v eliminiert wird. Wenn $\bar{K}_v = K_v e^{m'v}$ gilt, dann muß K_v dem in Effizienzeinheiten gemessenen Kapitalstock $\bar{K}_v$, abdiskontiert mit dem Fortschrittsparameter, entsprechen. Für den aggregierten Kapitalstock folgt hieraus unter Verwendung von (10):

$$(14) \quad K(t) = e^{-m't} \bar{K}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-m'(t-v)} K_v dv.$$

$K(t)$ in (14) drückt den gesamten Kapitalstock in äquivalenten neuen Maschinen aus. Irgend eine anfängliche Maschine bei $-\infty$ stellt den einheitlichen Maßstab dar, auf den alle später nachfolgenden Anlagenjahrgänge abdiskontiert werden. Die Maschinen sind um die Wirkung des Embodiment-Effektes bereinigt.

Unter Berücksichtigung von (14) folgt aus der Funktion (13):

$$(15) \quad Q(t) = e^{m' \alpha t} K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

Da jedoch $m' \alpha = m(1-\alpha)$ ist, wird die anfängliche Überlegung bestätigt; $m(1-\alpha)$ ist die formale Kennzeichnung des Harrod-neutralen Fortschritts, der sich in erhöhter Arbeitseffizienz niederschlägt. Die Produktionsfunktion (15) ist aber bereits aus früheren Zusammenhängen bekannt und diente dort als Grundlage eines Wachstumsmodells mit 'disembodied technical progress' (vergl. (3) in 3.1.1.). Es liegt somit die Vermutung nahe, daß zumindest die Ergebnisse hinsichtlich Stabilität und gleichgewichtiger Entwicklung durch die Annahme von kapitalgebundenem technischen Fortschritts unter putty-putty Bedingungen nicht verändert werden. Da weiterhin der Zins r und der Lohn l in jedem Zeitpunkt mit den Grenzproduktivitäten der entsprechenden Faktoren übereinstimmen müssen, folgt aus (15):

$$(16) \quad r = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha \frac{Q}{K} ; \quad l = \frac{\partial Q}{\partial L} = (1-\alpha) \frac{Q}{L}.$$

Dies resultiert natürlich wieder aus der im putty-putty Fall möglichen Formulierung (14).

Mit Hilfe der aggregierten, gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunk-

tion läßt sich nun die Entwicklung einer Volkswirtschaft unter den Voraussetzungen kapitalgebundenen technischen Fortschritts analysieren. Allerdings wird die Betrachtung im Rahmen der Vintage-Modelle nur auf Gleichgewichtslösungen bzw. deren Bedingungen ausgerichtet sein, da die dynamische Betrachtung der Ungleichgewichtssituation zu schwierige mathematische Probleme aufwirft¹⁾.

3.5.4. Der Gleichgewichtspfad und die Bedingungen einer störungsfreien Entwicklung des Volkseinkommens.

Ebenso wie unter der Voraussetzung des nicht-kapitalgebundenen Fortschritts, mögen die Annahmen des grundlegenden Modells in 2.1. Gültigkeit behalten. Um den gesamtwirtschaftlichen Aspekt der nun folgenden Betrachtung zu betonen, sei die Summe der Ausbringungen der einzelnen Maschinenjahrgänge, die in (13) oder (15) erfaßt wird, wieder mit Y bezeichnet. Auf die Zeitindizes kann im Rahmen der kontinuierlichen Analyse verzichtet werden.

Die konstante Sparquote s determiniert folglich weiterhin in jeder Periode die Höhe der Nettoinvestitionen (die bei unendlicher Lebensdauer der Anlagen mit den Bruttoinvestitionen identisch sind):

$$sY = J = K_t.$$

Das Arbeitspotential erhöht sich wie in den früheren Ansätzen mit der exogen bestimmten, konstanten Rate n : $L = L_0 e^{nt}$. Die Beziehung zwischen Investition J und Kapitalstock hängt von der Form der verwendeten Produktionsfunktion ab. Unter Benutzung der leichter zu handhabenden Funktion (13) bestimmt sich der Zuwachs zum Kapitalstock als $d\bar{K}/dt = e^{m't} K_t = e^{m't} J$. Die durch die Sparquote festgelegte Nettoinvestition hat folglich eine Höhe von $J = e^{-m't} d\bar{K}/dt$. Der Zuwachs zum Kapitalstock - in Effizienzeinheiten gemessen - hat demnach zwei Ursachen: einmal einen 'Mengeneffekt', der durch s und Y determiniert wird, zum anderen einen 'Produktivitätseffekt', der sich durch $e^{m't}$ in den neuen Investitionen verkörpert.

Die grundlegenden Annahmen in Verbindung mit der Produktionsfunktion (13) erlauben die Formulierung einer Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung den Zeitpfad der Kapitalakkumulation ergibt:

$$(17) \quad \frac{d\bar{K}}{dt} = s \cdot Y e^{m't} = s e^{m't} \cdot \bar{K}^\alpha L^{1-\alpha}$$

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 283.

$$(18) \frac{d\bar{K}}{dt} = s \cdot e^{m't} \cdot \bar{K}^\alpha \cdot L_0^{1-\alpha} \cdot e^{n(1-\alpha)t}$$

$$(19) \frac{d\bar{K}}{dt} = s L_0^{1-\alpha} \cdot e^{[m'+n(1-\alpha)]t} \bar{K}^\alpha \quad 1)$$

Diese Gleichung läßt sich analog dem Vorgehen in 2.1.3. lösen. Für den in Produktivitätseinheiten gemessenen Kapitalstock $\bar{K}$ ergibt sich ein Zeitpfad von

$$(20) \bar{K}_t = \bar{K}_0 \left[\frac{s}{\frac{m'}{1-\alpha} + n} \cdot \frac{Y_0}{\bar{K}_0} + 1 - \frac{\frac{s}{\frac{m'}{1-\alpha} + n} \cdot \frac{Y_0}{\bar{K}_0}}{e^{[m'+n(1-\alpha)]t}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{[m'+n(1-\alpha)]t}{1-\alpha}}$$

Nach vollzogener Grenzbetrachtung folgt aus (20) für $t \rightarrow \infty$ eine Höhe des Kapitalstocks von

$$(21) \bar{K}_t = \bar{K}_0 \cdot e^{[\frac{m'}{1-\alpha} + n]t}$$

Hieraus ist die Wachstumsrate durch Ableitung nach t und Division durch die ursprüngliche Gleichung erhältlich:

$$(22) \frac{d\bar{K}}{dt} \cdot \frac{1}{\bar{K}} = \frac{m'}{1-\alpha} + n$$

Der in Produktivitätseinheiten gemessene Kapitalstock $\bar{K}$ wächst entweder von Anfang an auf dem Gleichgewichtspfad mit der in (22) abgeleiteten Rate $m'/(1-\alpha) + n$ oder aber er nähert sich mit wachsendem t dieser Rate. Das System konvergiert also wieder automatisch zur gleichgewichtigen Rate hin. Ungleichgewichtssituationen werden natürlich dann vermieden, wenn der in der Ausgangssituation bestehende Kapitalstock von einer ganz bestimmten gleichgewichtigen Höhe $\bar{K}_0^*$ ist. Dieser Anfangswert läßt sich mit Hilfe von (20) bestimmen, woraus für $t \rightarrow \infty$ folgt:

$$(23) \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{K} = \bar{K}_0 \left[\frac{s}{\frac{m'}{1-\alpha} + n} \cdot \frac{Y_0}{\bar{K}_0} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{[m'+n(1-\alpha)]t}{1-\alpha}}$$

Da $Y_0 = \bar{K}_0^\alpha L_0^{1-\alpha}$ läßt sich aus (23) der endgültige Wert für $\bar{K}_0^*$ feststellen, indem in Gleichung (23) $\bar{K}_0$ in die Klammer zurückgeführt wird:

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 287.

$$\bar{K} = \left[\frac{s}{\frac{m'}{1-\alpha} + n} \frac{Y_0}{K_0} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{m' + n(1-\alpha)t}{1-\alpha}}$$

und der verbleibende Klammerausdruck mit Hilfe von $Y_0 = \bar{K}_0^\alpha L_0^{1-\alpha}$ zur Formulierung von $\bar{K}_0^*$ umgewandelt wird:

$$(24) \quad \bar{K}_0^* = L_0 \left[\frac{s}{\frac{m'}{1-\alpha} + n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Liegt dieser in (24) beschriebene Anfangswert des Kapitalstocks vor, dann wächst das Kapital von Beginn an mit der konstanten Rate (22). In allen Ungleichgewichtssituationen dagegen gilt die aus (19) durch Integration erhältliche Gleichung

$$(25) \quad \bar{K}_t = L_0 \left[\frac{s}{\frac{m'}{1-\alpha} + n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + C e^{\frac{1}{1-\alpha} t},$$

nach der erst mit $t \rightarrow \infty$ die gleichgewichtige Wachstumsrate (22) zu erreichen ist.

Die Gleichungen (21), (22) und (24) verdeutlichen, daß der einzige Unterschied zum neoklassischen Modell mit nicht-kapitalgebundenem Harrod-neutralen Fortschritt im konstanten Wachstumsparameter liegt. Unter der Annahme einer Cobb-Douglas Funktion ist das jedoch bedeutungslos, da ja alle Neutralitätsdefinitionen gegenseitig austauschbar und damit gleichwertig sind.

Diese formale Identität zwischen Modellen mit 'embodied' und 'disembodied' technischem Fortschritt wird noch offensichtlicher, wenn der Kapitalstock in festen, natürlichen Einheiten, d.h. gleichwertigen neuen Maschinen beschrieben wird. Hierzu ist es nur notwendig, in (21) und (24) $\bar{K}$ durch $e^{m't} K$ und $\bar{K}_0$ durch K_0 zu ersetzen:

$$(26) \quad K = K_0 e^{\left(\frac{m'}{1-\alpha} + n\right)t}$$

$$(27) \quad K_0 = L_0 \left[\frac{s}{\frac{m'}{1-\alpha} + n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Unter Verwendung von (26) und $L = L_0 e^{nt}$ folgt aus der Produktionsfunktion (13)

$$(28) \quad Y = K_0^\alpha \cdot e^{\left(\frac{m'}{1-\alpha} + n\right)\alpha t} \cdot L_0^{1-\alpha} \cdot e^{n(1-\alpha)t},$$

d.h. ein Wachstumspfad des Einkommens von

$$(29) \quad Y = Y_0 \left(\frac{m'x}{1-x} + n \right)^t, \quad \text{wenn } Y_0 = L_0 \left[\frac{s}{\frac{m'}{1-x} + n} \right]^{\frac{x}{1-x}} \text{ ist.}$$

Jetzt ist es möglich, an Stelle der Solow-Neutralität $m'/(1-x)$ den die Harrod-Neutralität kennzeichnenden Parameter m zu verwenden, so daß das aus 3.2.3. bekannte Ergebnis (20) bestätigt wird:

$$(30) \quad K = K_0 e^{(m+n)t}, \quad \text{mit } K_0 = L_0 \left[\frac{s}{m+m'+n} \right]^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(31) \quad Y = Y_0 e^{(m+n)t}, \quad \text{mit } Y_0 = L_0 \left[\frac{s}{m+m'+n} \right]^{\frac{x}{1-x}}$$

Der Embodiment-Effekt schlägt sich allein in den Anfangsbedingungen für (30) und (31) nieder, die sowohl Harrod- als auch Solow-neutralen Fortschritt berücksichtigen. Das gilt natürlich auch für die anfängliche Kapitalproduktivität Y_0/K_0 , die leicht aus den Anfangsbedingungen von (30) und (31) abzuleiten ist¹⁾:

$$(32) \quad \frac{Y_0}{K_0} = \frac{m+m'+n}{s}.$$

Diese Ergebnisse sind letztlich nur auf die Verwendung der Cobb-Douglas Funktion zurückzuführen²⁾. Der arbeitsvermehrnde Fortschritt nach Harrod ist notwendig, dem Arbeitswachstum eine der gleichgewichtigen Lösung entsprechende Höhe $(m+n)$ zu vermitteln, die Umwandlung der Harrod- in Solow-Neutralität gestattet es, den zur Aggregation des Kapitalstocks notwendigen Maßstab zu finden. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen der vorangegangenen Modelle ist so eindeutig, daß sich eine genauere ökonomische Interpretation der Abläufe erübrigt. Auf Erweiterungen - z.B. durch Berücksichtigung einer exponentiellen Abschreibung³⁾ - wird erst in dem noch zu behandelnden Fall mit putty-clay Prämissen einzugehen sein. Die Identität der Ergebnisse gegenüber Modellen mit 'disembodied' Fortschritt ist vielleicht auf die Verbindung von Cobb-Douglas Funktion, kapitalgebundenem Fortschritt und ex-ante und ex-post Substitutionalität zurückzuführen. Es fragt sich daher, ob unter weniger günstigen Substitutionsmöglichkeiten auch diese eindeutigen Ergebnisse abzuleiten sind.

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 269.

2) ebenda.

3) vergl. z.B. Solow, R.M., Investment...a.a.O., S. 92 f.

3.6. Der putty-clay Vintage-Fall.

Eine unendlich große Substituierbarkeit der Faktoren, wie sie der putty-putty Vintage-Fall zugrundelegt, scheint zumindest ex-post unrealistisch. Die in Betrieb befindlichen Anlagen werden kaum durch Verminderung des Arbeitseinsatzes für alle Zeiten rentabel zu gestalten sein. Wirklichkeitsnäher scheint dagegen eine Betrachtung zu sein, die - erstmals von Leif Johansen durchgeführt¹⁾ - nur vor der Installation der Anlagen eine freie Wahl der Kapitalintensität zuläßt, jedoch nach Vollzug dieser Wahl die Produktionsmethode bis ans Ende der Lebensdauer der Anlage festlegt. Die Faktoren sind damit ex-ante weiterhin substituierbar (putty), ex-post jedoch limitational (clay).

3.6.1. Die aus der putty-clay Bedingung erwachsenden Modifizierungen.

Die Annahme der ex-ante Substitutionalität und ex-post Limitationalität erfordert gegenüber dem putty-putty Fall einige Modifizierungen. Während im vorangegangenen Modell keine endliche Lebensdauer festzulegen war, da bei steigenden Löhnen durch den Substitutionsprozeß ständig die Rentabilität der Anlage gewährleistet wurde, wird jetzt bei ex-post limitationalen Faktoren und rationalem ökonomischen Verhalten ein Anlagenjahrgang nur eine ganz bestimmte Zeitspanne T im Produktionsprozeß verbleiben können. Selbst wenn vorerst von der Abnutzung der Anlagen abgesehen wird, d.h. die Maschinen besitzen eine unendlich lange physische Lebensdauer, so bewirken ökonomische Gründe ein Ausscheiden der Anlage. Ursache hierfür ist die ex-post Limitationalität, denn mit der Wahl der Produktionsmethode ist jetzt der Arbeitseinsatz pro Maschinenjahrgang ein für allemal festgelegt. Ein infolge technischen Fortschritts steigender Lohn bildet jetzt nicht den Steuerungsmechanismus für die Freisetzung von Arbeit - das ist ex definitione ausgeschlossen -, sondern ist der Maßstab für die Rentabilität und damit weitere Inanspruchnahme einer Anlage. So lange aus dem bei festen Faktoreinsätzen auch konstanten Output die anfallenden Lohnkosten zu finanzieren sind, werden die Unternehmer bereit sein, die Maschinen im Produktionsprozeß zu belassen. Erst wenn die aufzu-

1) Johansen, L., Substitution versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth, in: Econometrica, Vol. 27, 1959, S. 157 ff.

wendende Lohnsumme den Output übertrifft, d.h. absolute Verluste eintreten, wird der Anlagenjahrgang stillgelegt. Die Maschinen werden aus ökonomischen Gründen verschrottet. Auch ohne physisch begrenzte Haltbarkeit ist somit die Lebensdauer jeder Anlage zeitlich beschränkt. Am Ende der ökonomischen Lebensdauer steht dann die freigesetzte Arbeit zur Wiederverwendung zur Verfügung. Die Bestückung neuer Maschinen mit Arbeit resultiert wiederum aus exogen angewachsenem Arbeitspotential und freigesetzter Arbeit, wobei letzteres nicht durch Faktorsubstitution sondern durch das Verschrotten unrentabler Anlagen herbeigeführt wird.

Die weitere Analyse dieses putty-clay Vintage-Falls vollzieht sich in zwei verschiedenen Schritten: Zuerst sollen analog zum vorangegangenen Modell mehr formal die Bedingungen einer gleichgewichtigen Entwicklung des Volkseinkommens untersucht werden. Hierzu genügt es, der neu auftretenden Variablen Lebensdauer mehr den Charakter eines Parameters zu geben. Im Anschluß daran sollen in einem zweiten Schritt mehr die ökonomischen Hintergründe eines solchen Modells beleuchtet werden, was jedoch eine Handhabung der Lebensdauer als ökonomische Variable notwendig macht.

Die mehr formal-technische Darstellung des gleichgewichtigen Wachstums hat den Vorteil, die dahinter stehenden ökonomischen Zusammenhänge vorerst unberücksichtigt zu lassen. Es genügt hier zu zeigen, unter welchen Voraussetzungen ein neoklassisches Gleichgewicht zu verwirklichen ist. Im putty-clay Fall sind zwei wichtige Entscheidungsgrenzen zu ziehen ("decisions are taken at two margins"¹⁾): Es muß einmal vor Installation einer Anlage im Rahmen der vorgegebenen Produktionsfunktion die Wahl der Produktionsmethode entschieden werden ('intensive margin'), zum anderen bedarf der Zeitpunkt der Verschrottung der Anlage - d.h. die Lebensdauer - eine Klärung ('extensive margin').

3.6.2. Die Wahl der Produktionsmethode und die Bedingungen des gleichgewichtigen Wachstums.

Zur Beantwortung der Frage nach der zu wählenden Kapitalintensität sei anfangs von der vereinfachenden Annahme ausgegangen, daß die Maschinen in ihrer ökonomischen Lebensdauer nicht beschränkt seien. Eine einmal installierte Anlage verbleibe ewig im Produktionspro-

¹⁾ Hahn, F.H. and Matthews, R.C.O., The Theory...a.a.O., S. 62.

zeß. Es entfällt damit vorerst das Problem der Lebensdauer¹⁾.

Dennoch unterscheidet sich das auf diesen Annahmen beruhende Modell vom putty-putty Fall. Die Arbeitseinsätze an den unendlich lang lebenden Anlagen sind fest, zur Bestückung neuer Anlagen steht nur Arbeit aus exogenem Wachstum zur Verfügung. Weiterhin besitzt jeder Jahrgang eine eigene Produktionsfunktion. Zwar hat diese zur Verwirklichung der ex-ante Substitutionalität die Cobb-Douglas Form mit Harrod-neutralem Fortschritt, der sich in den neuen Maschinen verkörpert, jedoch bleibt diese Funktion nach Installation der Anlagen für jeden Jahrgang unverändert. Eine von Jahrgang zu Jahrgang divergierende Kapitalintensität hat dieses Spektrum unterschiedlicher Produktionsfunktionen zur Folge.

Für jeden Maschinenjahrgang v gilt dann bis $t=\infty$, daß an K_v Maschinen mit der Effizienz des Installationszeitpunktes L_v Arbeitsmengen-einheiten beschäftigt werden. Gemäß der für diesen Jahrgang gültigen Produktionsfunktion wird damit bis t gegen Unendlich ein Output Q_v erstellt.

In jedem Zeitpunkt ergibt sich aus der Addition sämtlicher Q_v - und L_v -Mengen die Höhe des Gesamteinkommens und die Höhe des gesamten Arbeitseinsatzes:

$$(1) \quad L = \int_{-\infty}^t L_v dv \quad Y = \int_{-\infty}^t Q_v dv$$

Der Zuwachs zum Kapitalstock, d.h. die neu eingesetzten Maschinen, wird wiederum durch die konstante Sparquote s und die Höhe des Einkommens im Installationszeitpunkt festgelegt. Das Arbeitswachstum bestimmt sich gemäß der Rate n : $L = L_0 e^{nt}$.

Die Veränderung des Einkommens in der Zeit dY/dt muß dem Output des in t neu hinzukommenden Anlagenjahrgangs entsprechen, da weder durch Substitution noch durch Verschroten Veränderungen des bisherigen Einkommens möglich sind. Der Output dieses neuen Jahrgangs wird durch seine Produktionsfunktion determiniert, die wiederum die Gestalt der Cobb-Douglas Funktion besitzen möge:

$$(2) \quad \frac{dY}{dt} = Q_v(t) \cdot e^{m(1-\alpha)v} K_v^\alpha L_v^{1-\alpha} \quad (v=t)$$

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 293.

Gleichung (2) verhilft nun, die Entscheidung der 'intensive margin' zu treffen. Berücksichtigt man $K(t) = sY(t)$ und $dL/dt = nL_0 e^{nt} = L_V(t)$, so läßt sich aus (2) eine Differentialgleichung ableiten, die es gestattet, für $T = \infty$ die Entwicklung des Einkommens aufzuzeigen; aus (2) folgt:

$$(3) \quad \frac{dY}{dt} = e^{m(1-\alpha)t} \cdot s^\alpha Y^\alpha (nL_0)^{1-\alpha} \cdot e^{n(1-\alpha)t}$$

$$(4) \quad \frac{dY}{dt} = s^\alpha (nL_0)^{1-\alpha} \cdot e^{(m+n)(1-\alpha)t} \cdot Y^\alpha$$

Durch partielle Integration ist aus (4) nach bekanntem Vorgehen der Wachstumspfad des Einkommens abzuleiten:

$$\int \frac{1}{Y^\alpha} \cdot dY = s^\alpha (nL_0)^{1-\alpha} \int e^{(m+n)(1-\alpha)t} dt$$

Die allgemeine Lösung hieraus lautet:

$$(5) \quad \frac{1}{1-\alpha} \cdot Y_t^{1-\alpha} = s^\alpha (nL_0)^{1-\alpha} \cdot e^{(m+n)(1-\alpha)t} \cdot \frac{1}{(m+n)(1-\alpha)} + C$$

Die Konstante C läßt sich durch die Anfangswerte für $t=0$ festlegen:

$$(6) \quad C = Y_0^{1-\alpha} - \frac{s^\alpha}{(m+n)(1-\alpha)} (nL_0)^{1-\alpha}$$

Hieraus folgt für die Höhe des anfänglichen 'gleichgewichtigen' Einkommens:

$$(7) \quad Y_0 = nL_0 \left[\frac{s^\alpha}{m+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ist die Anfangsbedingung (7) erfüllt, so vollzieht sich eine gleichgewichtige Entwicklung mit einer Wachstumsrate, die sich durch die Grenzbetrachtung für $t \rightarrow \infty$ aus (5) ableiten läßt:

$$(8) \quad Y_t^{1-\alpha} = \frac{s^\alpha}{m+n} \cdot (nL_0)^{1-\alpha} \cdot e^{(m+n)(1-\alpha)t} + C(1-\alpha)$$

$$Y_t^{1-\alpha} = \left[\frac{s^\alpha}{m+n} \cdot (nL_0)^{1-\alpha} + \frac{C(1-\alpha)}{e^{(m+n)(1-\alpha)t}} \right] e^{(m+n)(1-\alpha)t}$$

$$Y_t = \left[\frac{s^\alpha}{m+n} \cdot (nL_0)^{1-\alpha} + \frac{Y_0^{1-\alpha} - \frac{s^\alpha}{m+n} \cdot (nL_0)^{1-\alpha}}{e^{(m+n)(1-\alpha)t}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{\frac{(m+n)(1-\alpha)t}{1-\alpha}}$$

Für $t \rightarrow \infty$ muß in (8) der Klammerausdruck gegen einen konstanten Wert konvergieren, da der zweite Summand gegen Null geht:

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = \left[\frac{s^\kappa}{m+n} \cdot (nL_0)^{1-\kappa} \right]^{\frac{1}{1-\kappa}} \cdot e^{(m+n)t}$$

Gleichung (9) nach t differenziert und zur ursprünglichen Gleichung (9) ins Verhältnis gesetzt, bestimmt die Wachstumsrate des Einkommens für $t \rightarrow \infty$ als

$$(10) \quad \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{Y} = m+n.$$

Diese Wachstumsrate wird bei ungleichgewichtiger Ausgangssituation, $Y_0 \neq (7)$, nach unendlich langer Anpassungszeit verwirklicht. Es bleibt also auch unter putty-clay Bedingungen die dem neoklassischen Modell typische Stabilität erhalten. Ist dagegen schon von Beginn an der gleichgewichtige Ausgangswert des Einkommens erfüllt, so vollzieht sich die Entwicklung des Einkommens mit der in (10) beschriebenen Rate. Das wird deutlich, wenn in (8) die Anfangsbedingung eingesetzt wird:

$$(11) \quad Y_t = \left[Y_0^{1-\kappa} + \frac{Y_0^{1-\kappa} - Y_0^{1-\kappa}}{e^{(m+n)(1-\kappa)t}} \right] \cdot e^{(m+n)t}$$

$$(12) \quad Y_t = Y_0 \cdot e^{(m+n)t}$$

Wiederum bestimmt sich die gleichgewichtige Wachstumsrate aus der Summe von Harrod-neutralem Fortschritt und exogen vorgegebenem Arbeitswachstum. Der Unterschied zum putty-putty Fall ist nur quantitativer Natur, wie ein Vergleich der Anfangsbedingungen offenbart. Die Identität der Ergebnisse verwundert jedoch nicht, wenn man sich der restriktiven Annahme von $T = \infty$ erinnert. Die Bestimmung der Produktionsmethode geschieht derart, daß die Arbeit so auf die neuen Maschinen verteilt wird, daß aller durch die exogene Rate n festgelegte Zuwachs an Arbeitskräften auch beschäftigt wird. Lohnhöhe und Arbeitseinsatz müssen sich auf dem Gleichgewichtspfad entsprechend eingespielt haben. Der technische Fortschritt verkörpert sich in den neu installierten Anlagen und ist neben dem Bevölkerungswachstum der die Höhe der Wachstumsrate bestimmende Faktor. Die linear-homogene Produktionsfunktion jedes einzelnen Jahrgangs ver-

langt zur konstanten Erhöhung des Einkommens eine proportionale Erhöhung der Faktoreinsätze. Damit das Gesamteinkommen sich konstant um den Prozentsatz $m+n$ steigern kann, bedarf es auch bei unveränderten Produktionselastizitäten der einzelnen Produktionsfunktionen einer entsprechenden - in Effizienzeinheiten gemessenen - Zunahme der Faktoreinsätze pro neu in Betrieb genommenen Anlagenjahrgang. Auch ohne die Konstruktion einer gesamtwirtschaftlichen Produktionsfunktion läßt sich bei dieser Art der Entwicklung der Faktoreinsätze die Existenz des Gleichgewichtspfadcs verständlich machen.

Die grundsätzliche Übereinstimmung mit den vorangegangenen Überlegungen beruht letztlich auf der Annahme einer unendlich langen ökonomischen Lebensdauer der Maschinen. Im folgenden soll von dieser restriktiven Annahme abgegangen werden.

3.6.3. Die Bestimmung des Parameters Lebensdauer.

Die Aufhebung der Annahme unendlicher ökonomischer Lebensdauer der Maschinen führt zur Analyse der 'extensive margin' und verlangt die Miteinbeziehung der Variablen T in Form eines Parameters. Der Verschrottungszeitpunkt einer Anlage wird durch die Bedingung gekennzeichnet, daß die laufenden Kosten (Lohnkosten) genau die Höhe des Outputs des Maschinenjahrgangs erreicht haben. So lange aus der Produktion ein Überschuß der Einnahmen über die Ausgaben verbleibt, wird die Maschine in Betrieb gehalten. Da weiterhin die Annahmen der linear-homogenen Produktionsfunktion und der vollständigen Konkurrenz Gültigkeit besitzen, gilt auch für jeden Anlagenjahrgang das 'Adding-up-Theorem', so daß Nettoerlöse in Gestalt eines Unternehmereinkommens ausgeschlossen sind. Die Differenz zwischen Output und Lohnkosten stellt einen dem Kapital zugehörigen Bruttoerlös dar, der in Anlehnung an den Ricardoschen Rentenbegriff auch als Quasirente bezeichnet wird¹⁾. Da pro Anlagenjahrgang die Einsätze an Kapital und Arbeit während der gesamten Zeit der Nutzung nicht verändert werden, muß auch das daraus resultierende Produktionsergebnis konstant bleiben. Der infolge technischen Fortschritts in der Zeit steigende Lohn legt damit die Entwicklung der Bruttoerlöse in der Zeit fest, die von einem positiven Wert im Installa-

1) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen ...a.a.O., S. 21.

tionszeitpunkt v auf Null nach $t-v$ Perioden absinken. In diesem Moment wird die unrentabel gewordene Maschine 'ökonomisch' verschrottet, die Lebensdauer T der Maschine ist beendet. Dieser Zusammenhang läßt sich auch mit Hilfe der Arbeitsproduktivität der Maschine verdeutlichen. Bei unverändertem Output und konstantem Arbeitseinsatz wird auch die Arbeitsproduktivität auf einem bestimmten Wert verharren. So lange der Lohn geringer ist als die Arbeitsproduktivität, verbleibt ein positiver Rest für die Bruttoerlöse. Wenn der gestiegene Lohn die Höhe der Arbeitsproduktivität erreicht hat, dann muß der gesamte Output zur Entlohnung der Arbeitskräfte aufgewandt werden, die Bruttoerlöse sind gleich Null. Das Ende der Lebensdauer der Maschine ist erreicht¹⁾.

Zwar gelten auch weiterhin die Annahmen der Grenzproduktivitätstheorie, jedoch steht dem die Annahme der ex-post Limitationalität entgegen, sofern sich die Faktorpreise (Lohn) im Zeitablauf ständig verändern. Eine strenge Beachtung des Maximierungsprinzips "Grenzproduktivität der Arbeit gleich Lohn" würde den daraufhin vorgenommenen Arbeitseinsatz in der nächsten Periode bei gestiegenem Lohn als ineffizient kennzeichnen. Die hier zugrundegelegte Produktionsfunktion repräsentiert nur ex-ante Substitutionalität. Der daraus abzuleitenden Grenzproduktivität wird der Lohn deshalb nicht gleich sein, da zur Bestimmung der Grenzproduktivität eine zusätzliche Arbeitseinheit eingesetzt werden muß, die dann während der gesamten Betriebszeit mitgeführt werden muß, d.h. entsprechend des höheren Faktorpreises entlohnt werden muß. Das Grenzprodukt der Arbeit darf im Installationszeitpunkt nicht durch weiteren Arbeitseinsatz auf die Höhe des gegenwärtigen Lohnes eingerichtet werden, sondern auf den bei vollständiger Kenntnis der Entwicklung am Ende der erwarteten Lebensdauer bestehenden Lohn²⁾.

Die auf die Lebensdauer Einfluß nehmenden Größen sind damit bekannt. Unter der Voraussetzung Harrod-neutralen Fortschritts wird sich der Lohn in der Zeit um den Prozentsatz der Steigerung des technischen Wissens erhöhen. Ein beliebiger Maschinenjahrgang des Baujahres v erlaubt bei einem Arbeitseinsatz $L_v(t)$ einen Output $Q_v(t)$. Der Lohn nimmt um die Fortschrittsrate m zu. Im Verschrottungszeitpunkt $t+T$ entspricht definitionsgemäß die Lohnsumme $L_v(t) l(t+T)$ genau der Höhe der Produktion $Q_v(t)$, so daß die Höhe der Bruttoerlöse gleich Null ist:

1) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen...a.a.O., S. 19.

2) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 295.

$$(13) \quad Q_v(t) - l(t+T) L_v(t) = 0$$

Für die Lebensdauer T wird der Lohn vom Installationszeitpunkt t gemäß der Rate m angestiegen sein:

$$(14) \quad l(t+T) = e^{mT} \cdot l(t)$$

Aus (13) folgt damit unter Berücksichtigung von (14):

$$(15) \quad \frac{Q_v(t)}{L_v(t)} = e^{mT} l(t)$$

Nach Division von (15) durch $l(t)$ und durch Logarithmieren ergibt sich für T:

$$(16) \quad T = \frac{1}{m} \ln \left[\frac{Q_v(t)}{L_v(t)} \cdot \frac{1}{l(t)} \right] \quad 1)$$

Der Parameter T, der die Lebensdauer eines Anlagenjahrgangs wiedergibt, verhält sich reziprok zur Wachstumsrate des Lohnes und dem Quotienten $l(t)L_v(t)/Q_v(t)$. Dieser Quotient beschreibt den Anteil der Löhne am Gesamteinkommen der Anlage oder das Verhältnis von Lohn- zu Gesamtkosten. Ist dieses Verhältnis gleich Eins, d.h. ist Bedingung (13) erfüllt, dann muß die Lebensdauer der Anlage gleich Null sein ($\ln 1 = 0$). Je kleiner die konstante Wachstumsrate des Lohnes und/oder je geringer der Anteil der Lohnkosten an den Gesamtkosten ist, um so länger werden die Maschinen in Betrieb gehalten. Ein geringer Wert für m bewirkt nur eine allmähliche Erhöhung des Lohnes und damit ein nur langsames Ansteigen der Lohnkosten. Je kleiner der Anteil der laufenden Kosten an den Gesamtkosten ist, um so länger wird auch der Abbau der Bruttoerlöse dauern. Damit wurden die zu Beginn erwähnten Entscheidungsgrenzen klar umrissen: Die 'intensive margin' bestimmt sich aus dem gleichgewichtigen Wachstumsprozeß, die 'extensive margin' hängt vom Anteil der Lohnkosten und der Wachstumsrate des Lohnes ab.

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 295.

3.6.4. Der Wachstumsprozeß bei ökonomisch begrenzter Lebensdauer der Anlagen.

Auch wenn die Lebensdauer der Anlagen beschränkt ist, so wird wegen der Annahme der ex-post Limitationalität der Faktoren ebenso wie in (1) das Einkommen aus der Summe der Outputs der einzelnen - in Betrieb befindlichen - Maschinenjahrgänge gebildet:

$$(17) \quad Y = \int_{t-T}^t Q_v dv$$

Desgleichen bestimmt sich der gesamte Arbeitseinsatz als:

$$(18) \quad L = \int_{t-T}^t L_v dv$$

Im Unterschied zu (1) und (2) geht hier die Addition der Beiträge einzelner Jahrgänge nicht bis $-\infty$ zurück; $t-T$ sind die letzten noch benutzten Anlagen.

Das Hauptaugenmerk sei wiederum der Gleichgewichtslösung zugewandt. Dazu ist es notwendig, den Parameter T als Konstante zu behandeln, da - wie noch zu zeigen sein wird - nur unter dieser Bedingung eine konstante Wachstumsrate des Einkommens nachgewiesen werden kann¹⁾. Die Veränderung des Gesamteinkommens Y in der Zeit ist ebenso wie die Veränderung des Arbeitseinsatzes aus den Ableitungen von (17) und (18) erhältlich:

$$(19) \quad \frac{dL}{dt} = L_t - L_{t-T}$$

$$(20) \quad \frac{dY}{dt} = Q_t - Q_{t-T}$$

Sowohl die eingesetzte Arbeit als auch das Einkommen werden durch zwei entgegengesetzte Effekte beeinflusst: Die neu in den Produktionsprozeß eintretenden Anlagen bringen eine Erhöhung des Einkommens und der insgesamt eingesetzten Arbeit, die Verschrottung der alten Anlagen vermindert das Gesamteinkommen und den Gesamtarbeitseinsatz. Nur wenn die in t neu etablierten Maschinen zahlreicher und/oder effizienter sind, wird erster Effekt überwiegen und eine positive Entwicklung des Gesamteinkommens möglich machen. Da die Arbeit mit der Rate n exogen anwächst, der Output sich entsprechend mit $m+n$

¹⁾ Kemp, M.C. and Thanh, P.C., On a Class of Growth Models, in: *Econometrica*, Vol. 34, 1966, S. 259.

erhöht, lassen sich die negativen Auswirkungen auf Y und L als vom Gegenwartswert mit ihrer Wachstumsrate abdiskontierte Größen darstellen, mit deren Hilfe sich (19) und (20) umwandeln lassen in

$$(21) \quad \frac{dL}{dt} = L_t (1 - e^{-nT})$$

$$(22) \quad \frac{dY}{dt} = Q_t (1 - e^{-(m+n)T}) \quad 1)$$

Für den Wachstumspfad gelten weiterhin die Voraussetzungen $K_t = sY_t$ und $dL/dt = nL_0 e^{nt}$. Letzteres gestattet, den Arbeitseinsatz an der in t neu installierten Anlage durch

$$(23) \quad L_t = nL_0 \frac{e^{nt}}{1 - e^{-nT}} \quad 2)$$

auszudrücken. Mit Hilfe der Produktionsfunktion (2) aus 3.6.2. und unter Berücksichtigung der Gleichungen (22) und (23) ist es wiederum möglich, eine Differentialgleichung aufzustellen, die es gestattet, Rückschlüsse auf die Entwicklung des Einkommens in der Zeit bei endlicher Lebensdauer der Anlagen zu ziehen:

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= Q_t (1 - e^{-(m+n)T}) = e^{m(1-\alpha)t} (1 - e^{-(m+n)T}) K_t^\alpha \cdot L_t^{1-\alpha} \\ \frac{dY}{dt} &= e^{m(1-\alpha)t} (1 - e^{-(m+n)T}) s^\alpha Y^\alpha (nL_0)^{1-\alpha} \frac{e^{n(1-\alpha)t}}{(1 - e^{-nT})^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Die Umordnung nach zeitabhängigen Faktoren führt zu:

$$(25) \quad \frac{dY}{dt} = e^{(m+n)(1-\alpha)t} s^\alpha (nL_0)^{1-\alpha} Y^\alpha \frac{1 - e^{-(m+n)T}}{(1 - e^{-nT})^{1-\alpha}}$$

Der letzte Faktor in (25) ist zeitunabhängig, d.h. bei wachsendem t konstant. Im Wachstumsprozeß ist er deshalb für die Höhe der Wachstumsrate bedeutungslos. Vereinfachend sei er im folgenden mit A bezeichnet:

$$(26) \quad \frac{dY}{dt} = A e^{(m+n)(1-\alpha)t} s^\alpha (nL_0)^{1-\alpha} Y^\alpha$$

Mit Ausnahme von A entspricht Formulierung (26) vollkommen dem Ausdruck (4). Die Wachstumsrate des Einkommens muß deshalb weiterhin durch $m+n$ determiniert werden. Die Bestätigung bringt die Grenzbe-

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 295.

2) Massel, B.F., Investment...a.a.O., S. 243.

trachtung, wenn man in (26) t gegen Unendlich gehen läßt:

$$(27) \quad \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{Y} = m + n$$

Der durch die Begrenzung von T auf einen endlichen Wert erwachsende Unterschied ist nur an Hand der Anfangsbedingung festzustellen. Soll im Zeitpunkt $t=0$ sofort eine gleichgewichtige Entwicklung einsetzen, so verlangt das ein Ausgangseinkommen von Y_0 gleich

$$(28) \quad Y_0 = nL_0 \left(\frac{R_0}{m+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad 1).$$

Die konstante Lebensdauer bleibt ebenso wie die invariante Sparquote ohne Einfluß auf die Höhe der Wachstumsrate des Einkommens, sie ist nach (28) nur für das Niveau des Einkommens mitverantwortlich. Die ökonomischen Ursachen hierfür sollen in späterem Zusammenhang hervorgehoben werden. Entscheidend für die Erreichung eines Gleichgewichtspfadcs mit der in (27) beschriebenen Rate ist, daß neben den bisher schon bekannten Bedingungen die Lebensdauer T ebenfalls konstant ist. Das verlangt aber eine konstante Wachstumsrate des Lohnes und ein immer gleichbleibendes Verhältnis von Lohn- zu Gesamtkosten an jedem Jahrgang. Bezeichnet man den Anteil der laufenden Kosten als ω , so folgt aus (16) ein allgemeiner Ausdruck zur Bestimmung der Höhe der Lebensdauer T einer sich unter putty-clay Bedingungen gleichgewichtig entwickelnden Volkswirtschaft:

$$(29) \quad T = \frac{1}{m} \ln \left(\frac{1}{\omega} \right) \text{ bzw. } T = \frac{1}{m} \ln \omega^2).$$

Eine Wirtschaft mit vergleichsweise hohen technischen Fortschritt wird folglich einen modernen Kapitalstock besitzen, da eine hohe Wachstumsrate m auf eine Verkürzung der Lebensdauer hinwirkt, so daß das an neue Anlagen gebundene technische Wissen sich schneller verbreitet. Auf dem Gleichgewichtspfad muß auch ω konstant bleiben, da sowohl Lohnsumme als auch Einkommen mit der gleichgewichtigen Rate $m+n$ wachsen.

Jetzt ist es auch möglich festzustellen, nach welchen Gesichtspunkten bei endlicher Lebensdauer der Maschinen und ex-post Limi-

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 296.

2) Kemp, M.C. and Thanh, P.C., On a Class...a.a.O., S. 262.

tationalität der Arbeitseinsatz in Abhängigkeit von der Lohnhöhe eingerichtet wird. Definitionsgemäß wird im Verschrottungszeitpunkt der Lohn genau die Höhe der Durchschnittsproduktivität der Arbeit erreicht haben, wie Gleichung (13) verdeutlicht hat. Für den Lohn gilt im Zeitpunkt der Verschrottung $t+T$:

$$(30) \quad l(t+T) = \frac{Q_t}{L_t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{Q_{t-T}}{L_{t-T}} = l(t).$$

Der Lohn wird folglich nicht durch das Grenzprodukt an der 'intensive margin' beschrieben, sondern ist gleich dem Durchschnittsprodukt der ältesten Anlage "and this may be thought of as a marginal product at the extensive margin"¹⁾. Ein weiterer Unterschied zum vorangegangenen putty-putty Fall liegt in der Verteilung der vorhandenen Arbeitskräfte auf die in einem bestimmten Zeitpunkt in Betrieb befindlichen Maschinenjahrgänge. Am Jahrgang v muß in jedem Zeitpunkt zwischen Installation und Verschrotten ein Arbeitseinsatz L_t , d.h. Arbeitseinsatz des neuesten gerade errichteten Jahrgangs abdiskontiert mit der Wachstumsrate n für die Zeit $t-v$ bestehen:

$$(31) \quad L_v = L_t \cdot e^{-n(t-v)} \quad t-T < v < t$$

Die Veränderung der insgesamt beschäftigten Arbeit dL/dt wird durch Gleichung (20) determiniert. Die negative Beeinflussung durch freigesetzte Arbeit läßt sich analog zu (31) durch Abdiskontieren mit der Wachstumsrate feststellen: $L_{t-T} = L_t e^{-nT}$. Die Zusammensetzung der in t neu eingesetzten Arbeitskräfte ergibt sich aus (20) $dL/dt = L_t - L_{t-T}$ als:

$$(32) \quad L_t = \frac{dL}{dt} + L_{t-T}.$$

Der Arbeitseinsatz an den neuen Maschinen im Zeitpunkt t rekrutiert sich aus dem exogenen Arbeitswachstum und der freigesetzten Arbeit, welche vor $t-T$ Perioden an dem damals installierten Jahrgang eingesetzt wurden. Wäre $n=0$, d.h. das Arbeitspotential konstant, so bliebe die Verteilung der Arbeit auf alle Jahrgänge unverändert²⁾. Neue Maschinenjahrgänge werden mit der Arbeit der

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S.297.

2) ebenda.

verschrotteten Jahrgänge bestückt. Da jedoch die neuen Maschinen effizienter sind, steigt dennoch das Gesamteinkommen, welches bei konstanter Sparquote einen höheren Kapitaleinsatz impliziert, d.h. eine größere Anzahl von Maschinen in der nächsten Periode hervorruft. Die konstante Arbeitsmenge wird dann auf immer größere Maschinenzahlen verteilt, d.h. pro einzelne Maschine sinkt die beschäftigte Arbeit. Das wiederum ist aber nur der Ausdruck für die gestiegene Effizienz, d.h. den an die Installation der Maschine gebundenen technischen Fortschritt. Ist dagegen $n > 0$, so steht jedem neu installierten Maschinenjahrgang neben der freigesetzten Arbeit auch der Zuwachs an Arbeitskräften gemäß n zur Verfügung. Aber auch die freigesetzte Arbeit steigt im Zeitablauf an und zwar ebenfalls mit der Rate n . Der Unterschied liegt allein in der geringeren Basis. So lange aber exogen bestimmter Zuwachs und freigesetzte Arbeit mit dem gleichen Prozentsatz anwachsen, wird auch die insgesamt zur Verfügung stehende Arbeit sich mit dieser Rate entwickeln. Voraussetzung ist nur, daß die absolute zeitliche Differenz zwischen Anschaffung einer neuen Maschine und Verschrottung der alten Maschine sich nicht verändert, d.h. die Lebensdauer T konstant ist. Die Notwendigkeit der invarianten Lebensdauer wird also schon von diesem Blickpunkt deutlich, denn ein konstantes T ist die unabdingbare Voraussetzung für die Konstanz der Wachstumsrate der Arbeit, welche ihrerseits eine grundlegende Bedingung der Existenz eines Gleichgewichts im neoklassischen Modell darstellt.

3.6.5. Gleichgewichtiges Wachstum und physische Abnutzung der Anlagen.

Der vorangegangene Nachweis eines gleichgewichtigen Wachstumsprozesses bedarf nur einer geringfügigen Veränderung für den Fall, daß die Anlagen keine physisch unendlich lange Lebensdauer besitzen. Bleiben nämlich alle relevanten Variablen unter der Annahme einer exponentiellen Abschreibung gemäß $e^{-\delta t}$ in ihrem Verhältnis zueinander konstant, so wird der vermutlich geringere Kapitalstock ohne Einfluß auf die Höhe der Wachstumsrate bleiben. Es werden sich voraussichtlich nur Veränderungen des Einkommensniveaus ergeben. Alle im vorangegangenen Abschnitt gesetzten Prämissen

mögen weiterhin Gültigkeit besitzen, so daß die für jeden Maschinenjahrgang relevante Produktionsfunktion die Form der Cobb-Douglas Funktion hat. Der durch die Sparquote determinierte Kapitaleinsatz kombiniert mit dem entsprechenden Arbeitseinsatz bestimmt den Output des Anlagenjahrgangs, der jedoch nicht wie unter der Annahme unendlicher physischer Lebensdauer bis zum Verschrottungszeitpunkt konstant bleiben kann. Das ex-post fixe Einsatzverhältnis der Faktoren verlangt bei einem in der Zeit gemäß der Abschreibungsrate verminderten Kapitaleinsatz eine proportionale Arbeitsfreisetzung. Wegen der Linear-Homogenität der Produktionsfunktion resultiert daraus eine proportionale Abnahme des Outputs. Gerade diese proportionale Entwicklung von Kapital- und Arbeitseinsatz und Produktionsergebnis erlaubt die Konstanz der Lebensdauer der Anlagen. Bei gleicher Einkommensverteilung (Lohnanteil an den Gesamteinnahmen des Maschinenjahrgangs) und Fortschrittsrate muß deshalb T mit dem Wert der Lebensdauer im Modell ohne Abschreibung in Höhe und Abhängigkeit identisch sein.

Der Kapitaleinsatz am Jahrgang v im Zeitpunkt t richtet sich nach Bedingung

$$(33) \quad K_v(t) = K_v(v) e^{-\delta(t-v)} \cdot 1$$

Die Berücksichtigung der Abnutzung macht offensichtlich eine Reihe von Modifizierungen notwendig. Während bisher keine Unterscheidung zwischen Brutto- und Nettoinvestition getroffen werden mußte, ist es jetzt bedeutsam, beide Größen auseinanderzuhalten. In (33) beschreibt zwar K_v weiterhin den Kapitaleinsatz am Anlagenjahrgang v , dieser wird jedoch über die Lebensdauer hinweg gemäß der die Abnutzung kennzeichnenden Rate δ geringer. $K_v(t)$ in (33) ist folglich die nach $t-v$ Perioden noch in Betrieb befindliche Maschinenzahl. Die ex-post Limitationalität bedingt nun eine äquivalente Verminderung des Arbeitseinsatzes:

$$(34) \quad L_v(t) = L_v(v) e^{-\delta(t-v)}$$

Mit einem durch die exponentielle Abschreibungsrate gesteuerten Rückgang des Kapital- und Arbeitseinsatzes muß sich im Zeitablauf auch die Ausbringung des Anlagenjahrgangs vermindern:

1) Vergl. als Ansatzpunkt hierzu: Solow, R.M., Investment...a.a.O., S. 92.

$$(35) \quad Q_v(t) = Q_v e^{-s(t-v)}$$

Die insgesamt eingesetzte Arbeit ergibt sich aus der Summe der an allen Anlagenjahrgängen beschäftigten Arbeit:

$$(36) \quad L = \int_{t-T}^t L_v(t) dv = \int_{t-T}^t L_v(v) e^{-s(t-v)} dv = e^{-st} \int_{t-T}^t L_v(v) e^{sv} dv$$

Analog zu (20) bestimmt sich die Veränderung der Gesamtarbeitsmenge durch die Ableitung von (36) nach t . Entsprechend der Produktregel ergibt sich:

$$(37) \quad \frac{dL}{dt} = -s e^{-st} \cdot L_t e^{st} + e^{-st} (L_t e^{st} - L_{t-T} e^{s(t-T)})$$

Die Umformung von (37) offenbart drei Quellen der Veränderung des Arbeitseinsatzes:

$$(38) \quad \frac{dL}{dt} = -s L_t + L_t - L_{t-T} e^{-sT}$$

Ebenso wie in (20) hat der Arbeitseinsatz an den neu in Betrieb genommenen Maschinen einen positiven Effekt und durch Verschrottung freigesetzte Arbeit einen negativen Effekt auf die gesamte eingesetzte Arbeitsmenge. Zusätzlich bewirkt die Abnutzung der Anlagen eine kontinuierliche Freisetzung von Arbeitskräften, die eine Abnahme des Gesamtarbeitseinsatzes induziert. Da diese einzelnen Vorgänge bei konstanter Lebensdauer T jedoch nur zeitlich verschoben durch die Rate n gesteuert werden, wird das Gesamtarbeitsangebot sich auch weiterhin mit dieser Rate entwickeln. Unterschiede werden nur in der absoluten Höhe auftreten.

Da die gesamte Arbeit folglich um n -Prozent für die Lebensdauer einer Anlage von t bis $t+T$ anwächst, entspricht der Einsatz an Arbeitseinheiten am neuen Jahrgang $L_t e^{nT} = L_{t+T}$. Der Arbeitseinsatz an der in diesem Augenblick verschrotteten Maschine beträgt demnach $L_{t-T} = L_t e^{-nT}$. Die zeitliche Veränderung von L läßt sich dann mittels

$$(39) \quad \frac{dL}{dt} = L_t (1 - s - e^{-(s+n)T})$$

beschreiben. L_t ist aber auch gleich $L_0 e^{nt}$ gemäß der Voraussetzung des neoklassischen Modells. Die zeitliche Veränderung dL/dt ist also gleich $nL_0 e^{nt}$. Der Arbeitseinsatz bestimmt sich so durch

$$\begin{aligned} n L_0 e^{nt} &= -\delta L_t + L_t (1 - e^{-(\delta+n)T}) \\ n L_0 e^{nt} &= -\delta L_0 e^{nt} + L_0 (1 - e^{-(\delta+n)T}) \\ (n + \delta) L_0 e^{nt} &= L_0 (1 - e^{-(\delta+n)T}) \end{aligned}$$

$$(40) \quad L_t = (n + \delta) L_0 \frac{e^{nt}}{1 - e^{-T(\delta+n)}} \quad 1)$$

Die Miteinbeziehung der exponentiellen Abschreibungsrate verändert also den Arbeitseinsatz an neuen Maschinen, wie ein Vergleich der formal sehr ähnlichen Gleichungen (23) und (40) deutlich macht. Die durch die Abschreibung freigesetzte Arbeit tritt als zusätzlicher Faktor hinzu, in (40) durch δ repräsentiert. Je größer δ ist, um so höher wird bei konstanten und vergleichbaren Werten für n , L_0 und T der Wert für L_t sein, denn in (40) muß mit $\delta \rightarrow \infty$ der Faktor $(n + \delta)$ immer mehr an Bedeutung gewinnen. Allerdings ist dieser Vergleich ebenso zweifelhaft wie im vorangegangenen Fall, da auf dem Gleichgewichtspfad n und L_0 in beiden Fällen (d.h. mit und ohne Berücksichtigung der Abnutzung) unterschiedlich sein müssen. Ebenso wie der Output des einzelnen Jahrgangs durch $e^{-\delta(t-v)}$ beeinflusst wird, so muß sich die Abschreibung auch auf das Gesamteinkommen auswirken. Y sei wiederum gleich der Summe der Beiträge aller in Betrieb befindlicher Jahrgänge. Aus (35) folgt deshalb:

$$(41) \quad Y = e^{-\delta t} \int_{t-T}^t e^{\delta v} Q_v(t) dv$$

Die Veränderung des Einkommens in der Zeit läßt sich mit Hilfe der Ableitung von (41) nach t feststellen:

$$(42) \quad \frac{dY}{dt} = -\delta e^{-\delta t} Q_t e^{\delta t} + e^{-\delta t} (e^{\delta t} Q_t - e^{\delta(t-T)} Q_{t-T})$$

Wiederum gibt Q_{t-T} die Verminderung des Gesamteinkommens infolge des Ausscheidens eines Maschinenjahrgangs an. Im kontinuierlichen Entwicklungsprozeß ist dies jedoch ohne Belang für die Höhe der

1) Kemp, M.C. and Thānh, P.C., On a Class...a.a.O., S. 260.

Wachstumsrate, da kompensierend zur verschrotteten Anlage die Inbetriebnahme der effizienteren neuen Anlage erfolgt.

Unter der - noch nicht bewiesenen - Annahme, daß δ keinen Einfluß auf die Wachstumsrate des Einkommens ausübt, sondern daß diese weiterhin nur durch Arbeitswachstum und Fortschritt determiniert ist, muß der Output einer gerade ausscheidenden Maschine genau von der Höhe $Q_t e^{-(m+n)T}$ sein. Läßt sich unter dieser Hypothese ein System ableiten, in dem die Wachstumsrate des Einkommens tatsächlich durch diese Rate beschrieben wird, dann war die Annahme der Nichtbeeinflussung von Wachstumsrate und Abschreibung gerechtfertigt.

Die Veränderung des Gesamteinkommens wird somit durch

$$(43) \quad \frac{dY}{dt} = Q_t - \delta Q_t - Q_t e^{-(m+n+\delta)T}$$

beschrieben. Die formale Übereinstimmung mit Gleichung (22) ist nicht verwunderlich, da in beiden Fällen der gleiche Lösungsansatz verwendet wird. Allerdings scheinen quantitative Unterschiede zu bestehen, deren genaue Charakterisierung wegen der nicht identischen Größen unmöglich ist.

Der Output Q_t läßt sich durch die zu seiner Bestimmung notwendige Produktionsfunktion (der Cobb-Douglas Form) ersetzen. Unter der Berücksichtigung von (40) folgt dann aus (43):

$$(44) \quad \frac{dY}{dt} = e^{m(1-\alpha)t} s^\alpha Y^\alpha \left[(n+\delta) L_0 \frac{e^{nt}}{1 - e^{-(n+\delta)T}} \right]^{1-\alpha}$$

Werden die Variablen entsprechend ihrer Abhängigkeit von t geordnet:

$$(45) \quad \frac{dY}{dt} = e^{(m+n)(1-\alpha)t} s^\alpha Y^\alpha \left[(n+\delta) L_0 \right]^{1-\alpha} \frac{1 - \delta - e^{-(m+n+\delta)T}}{(1 - e^{-(n+\delta)T})^{1-\alpha}}$$

und wird der konstante Bruch durch A ersetzt, so vereinfacht sich (45) zu:

$$(46) \quad \frac{dY}{dt} = s^\alpha A \cdot e^{(m+n)(1-\alpha)t} \left[(n+\delta) L_0 \right]^{1-\alpha} Y^\alpha$$

Wenn man diese Gleichung partiell integriert und die Integrationskonstante C durch die Anfangsbedingung für $t=0$ festlegt, ergibt sich:

$$(47) \quad \frac{1}{1-\alpha} \cdot Y^{1-\alpha} = s^{\alpha} R \cdot [(n+s)L_0]^{1-\alpha} \frac{1}{(m+n)(1-\alpha)} \cdot e^{(m+n)(1-\alpha)t} + C$$

$$Y^{1-\alpha} = \frac{s^{\alpha} R}{m+n} [(n+s)L_0]^{1-\alpha} \cdot e^{(m+n)(1-\alpha)t} + C$$

$$(48) \quad C = Y - \left[\frac{s^{\alpha} R}{m+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot (n+s)L_0$$

Durch die Wahl von $C=0$ bestimmt sich hieraus der Anfangswert des Einkommens:

$$(49) \quad Y_0 = (n+s)L_0 \left[\frac{s^{\alpha} R}{m+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Der Vergleich von (49) und (28) bestätigt, daß die Abschreibungsrate δ durchaus das Niveau des Einkommens mitbestimmt. Das anfängliche gleichgewichtige Einkommen wird um so höher sein, je größer der Wert der Abschreibungsrate δ ist. Die Ursache ist darin zu sehen, daß bei einer vorgegebenen Sparquote das Einkommen um so höher sein muß, damit die notwendige (hohe) Anzahl neuer Maschinen möglich wird. Diese wiederum werden benötigt, um die bei großem δ hohe Zahl der freigesetzten Arbeitskräfte wieder zu beschäftigen. Die Bestätigung der oben verwendeten Hypothese, daß das Einkommenswachstum nur von den Faktoren Arbeit und Fortschritt determiniert ist, läßt sich aus (47) für t gegen Unendlich gewinnen:

$$(50) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = \left[\frac{s^{\alpha} R}{m+n} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} [(n+s)L_0] e^{(m+n)t} \quad ^1)$$

Wird die Bedingung (49) des anfänglich gleichgewichtigen Einkommens erfüllt, so folgt aus (50) ein Gleichgewichtspfad der Einkommensentwicklung von

$$(51) \quad Y_t = Y_0 \cdot e^{(m+n)t}$$

Die Ergebnisse in bezug auf Gleichgewicht und Stabilität des Modells werden also durch die Berücksichtigung einer physischen Abnutzung des Kapitals nicht betroffen. Die Abschreibung wird sich jedoch wahrscheinlich in einer geringeren Einkommenshöhe bemerkbar machen.

1) Vergl. z.B.: Johansen, L., Substitution...a.a.O., S. 168 f.

3.6.6. Die Behandlung der Lebensdauer als Variable, ihre Kennzeichnung durch unternehmerische Entscheidungen.

Die bisherigen Erörterungen waren vor allem auf den Nachweis einer gleichgewichtigen Entwicklung des Einkommens abgestellt. Die Lebensdauer T hatte mehr den Charakter eines Parameters, dessen Konstanz mehr oder weniger formal-technisch begründet wurde. Die Konstanz von T verlangt jedoch auf dem Gleichgewichtspfad ein ganz bestimmtes unternehmerisches Verhalten, dessen Ursachen jetzt in den Vordergrund der Analyse gestellt werden. Damit sind vor allem Fragen, die die Wahl der Produktionsmethode, Bestimmung der Rentabilität der Anlagen und Beziehungen zwischen den ökonomischen Variablen betreffen, von Bedeutung.

Dazu sei von folgenden, teilweise schon bekannten Annahmen ausgegangen:

1. Eine Maschine gilt nur so lange als rentabel, wie sie positive Bruttoerlöse erzielt.
2. Nur eine rentable Maschine verbleibt im Produktionsprozeß.
3. Ex-ante ist die Lohnentwicklung dem investitionsbereiten Unternehmer bekannt. Die Höhe der laufenden Kosten unterliegt der vollständigen Voraussicht.
4. Die letztlich pro Maschine anfallenden Lohnkosten und damit die Bruttoerlöse sind von der gewählten Produktionsmethode abhängig.
5. Der Vergleich verschiedener Bruttoerlöse aufgrund alternativer Kapitalintensitäten geschieht mit Hilfe des als Abdiskontierungsfaktor benutzten Zinses.
6. Der Zins ist in der Zeit konstant, so daß sich der Kapitaleinsatz nach dem Vergleich von Zins und interner Verzinsung der Maschine ausrichtet.
7. Die Höhe des einzusetzenden Kapitals wird durch das Gesamteinkommen und die konstante Sparquote determiniert.

Mit Hilfe dieser Annahmen, die im folgenden noch genauer erklärt werden, ist es möglich, die ökonomischen Hintergründe der Variablen 'Lebensdauer' etwas zu erleuchten. Dabei soll nicht an der Prämisse der Konstanz von T gerüttelt werden - diese ist ja schließlich notwendig für die Verwirklichung eines Gleichgewichtspfades -, sondern mit Hilfe der Bestimmungsgründe des unternehmerischen Ver-

haltens soll gerade die Konstanz von T verdeutlicht werden. Dazu ist es notwendig, die Geschehnisse am einzelnen Maschinenjahrgang zu beschreiben, bevor zur gesamtwirtschaftlichen Betrachtung übergegangen werden kann.

3.6.7. Die Abhängigkeit der Produktionsmethode von der Höhe der Faktorpreise.

Von den im vorangegangenen Abschnitt aufgeführten Annahmen bilden die Punkte 1 bis 3 die Grundlage der Gleichungen (13) bis (16). Als neue Variable tritt nach den Punkten 5 und 6 der Marktzins neu in die Betrachtung ein. Er sei definitionsgemäß in der Zeit konstant, so daß

$$(52) \quad r_t = r_u(t)$$

immer Gültigkeit besitzt. Der heutige Zins r_t besteht auch in zukünftigen Perioden u ($t < u$).

Zuerst bedarf jedoch der Punkt 4 einer gewissen Klärung. Für jeden Maschinenjahrgang sieht sich der Unternehmer einer Cobb-Douglas Funktion gegenüber. Wenn ihm auch über die Beziehung sY der Kapitaleinsatz - vorerst wenigstens - vorgegeben ist, so bestimmt sich seine Wahl der Produktionsmethode durch die Höhe der tatsächlich eingesetzten Arbeit $L_v(t)$. Dieser Arbeitseinsatz aber determiniert bei vorgegebener Lohnentwicklung die Höhe der zukünftigen Bruttoerlöse und damit wiederum auch die Lebensdauer der Maschine. Das wird deutlich, wenn alternative Arbeitseinsätze in Betracht gezogen werden. Je geringer der Arbeitseinsatz $L_v(t)$ bei vorgegebenem Kapitaleinsatz $K_v(t)$ ist, um so höher muß relativ der Output $Q_v(t)$ sein, denn aufgrund der abnehmenden Grenzerträge sinkt der Output nur unterproportional im Verhältnis zur verminderten Arbeit. Da für eine bestimmte Lohnhöhe mit zurückgehendem Arbeitseinsatz (d.h. einer Kapitalintensitätserhöhung) die Lohnkosten dagegen proportional sinken, geht die Verminderung der Arbeit mit einer Steigerung der Bruttoerlöse einher. Bei exogen determinierter und in der Zeit konstanter Wachstumsrate des Lohnes entspricht dem höheren Bruttoerlös eine größere Lebensdauer der Anlage. T ist somit eine Funktion der Wachstumsrate des Lohnes

chen Arbeitseinsatz zu betreiben (d.h. mit einer gegen Unendlich gehenden Kapitalintensität), denn hier ist der aufaddierte Bruttoerlös am höchsten. Das gilt jedoch nur, wenn allein die positive Differenz zwischen den Gesamtkosten bzw. Einnahmen und Lohnkosten bzw. Ausgaben als einziges Kriterium der Nutzungsdauer angesehen wird. Ein derartiges unternehmerisches Verhalten ist aber irrational, denn mit der längeren Lebensdauer ist auch ein längerer Einsatz des Kapitals $K_v(t)$ verbunden. Dieser Kapitaleinsatz verursacht nämlich Kosten, die sich durch den Vergleich von interner Verzinsung der Maschine mit der entsprechenden Verzinsung des Kapitals am Markt ermitteln lassen. Die Lebensdauer der Maschine wird aus diesem Grund nicht ins Unermeßliche wachsen können, sie erfährt durch die steigenden Zinskosten eine Begrenzung, die eine Produktionsmethode mit zu hoher Kapitalintensität nicht wünschenswert macht. Der Unternehmer wird folglich nicht versuchen, die absolut höchste Bruttoerlössumme zu erzielen, sondern jene Produktionsmethode auswählen, die ihm den höchsten Bruttoerlös der Anlage - bezogen auf ihre Lebensdauer - garantiert. Da mit steigender Kapitalintensität die Summe der Bruttoerlöse absolut immer zunimmt, diese absolut höheren Bruttoerlöse aber auch mit längerem, teurerem Kapitaleinsatz erkaufte werden müssen, kann nur ein Vergleich der Gegenwartswerte aller möglichen zukünftigen Bruttoerlöse Aufschluß über die optimale Produktionsmethode geben. Zur Bestimmung des Gegenwartswertes kann der in der Zeit unveränderte Zinssatz r herangezogen werden. Jene zukünftige Bruttoerlössumme, die mit dem Marktzins für die erwartete Lebensdauer der Anlage abdiskontiert, ein Maximum ergibt, wird der Unternehmer tatsächlich verwirklichen wollen. Um das nun zu realisieren, ist es notwendig, den vorgegebenen Kapitaleinsatz mit einer optimalen Arbeitsmenge zu kombinieren. Das determiniert bei bekannter Wachstumsrate des Lohnes die Lebensdauer der Anlage. Die Frage, warum und unter welchen Voraussetzungen der durch die Sparquote festgelegte Kapitaleinsatz tatsächlich zum Zuge kommt, soll vorerst noch zurückgestellt werden.

Die optimale Kapitalintensität für exogen determinierten Kapitaleinsatz ist jene, die den höchsten Gegenwartswert aller für die Lebensdauer der Anlage addierter Bruttoerlöse ergibt. Bezeichnet man die von den Unternehmern für den Zeitpunkt u in t ($t(u)$) er-

wartete Quasirente $R_u(t)$, so folgt aus (13) und (14):

$$(52) \quad R_u(t) = Q_t - l(t) \cdot e^{m(u-t)} L_t.$$

Im Zeitpunkt u ist der Bruttoerlös der in t installierten Anlage genau gleich der Differenz zwischen Output (=Einnahmen) und des als optimal angesehenen Arbeitseinsatzes L_t multipliziert mit dem von t bis u gemäß der Rate m gestiegenen Lohn $l(t)$. Diese für verschiedene Zeitpunkte u von t bis $t+T$ anfallenden Bruttoerlöse aufaddiert, ergeben die Summe U der Quasirenten der Anlage mit der Arbeitsproduktivität Q_t/L_t und der Kapitalintensität K_t/L_t , wobei K_t durch sQ_t vorgegeben wurde.

$$(53) \quad U_{t+T} = \int_t^{t+T} R_u(t) du.$$

Je nach Wahl des Arbeitseinsatzes L_t in t muß U_{t+T} eine unterschiedliche Höhe besitzen. Um alternative Produktionsmethoden vergleichen zu können, werden die verschiedenen Gesamterlöse der unterschiedlich lange bestehenden Anlagen für ihre Lebensdauer mit dem exogen bestimmten Zins abdiskontiert. Die verschiedenen Gegenwartswerte U_t erlauben einen Aufschluß über den optimalen Arbeitseinsatz:

$$(54) \quad U_{t+T} = \int_t^{t+T} R_u(t) e^{-r(u-t)} du.$$

Der den höchsten Gegenwartswert bestimmende Arbeitseinsatz L_t läßt sich mit Hilfe der üblichen Extremwertbestimmung durchführen¹⁾. Der Gegenwartswert muß dazu partiell nach L differenziert werden, wobei jedoch beachtet werden muß, daß Variationen des Arbeitseinsatzes sowohl den Output des Jahrgangs als auch seine Lebensdauer beeinflussen. Aus (54) folgt unter Verwendung von (52):

$$(55) \quad U_{t+T} = Q_t \int_t^{t+T} e^{-r(u-t)} du - l(t) L_t \int_t^{t+T} e^{(m-r)(u-t)} du.$$

Gleichung (55) ergibt nach L differenziert²⁾:

1) Phelps, E.D., Substitution...a.a.O., S. 270.

2) Der Rechenvorgang ist einem Beispiel von Bronstein, J.N. und Semendjajew, K.A., Taschenbuch der Mathematik, 7. Aufl., Zürich und Frankfurt 1967, S. 349 nachempfunden.

$$(56) \quad \frac{\partial U}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial L} \int_t^{t+T} e^{-r(u-t)} du - \ell(t) \int_t^{t+T} e^{(m-r)(u-t)} du + \frac{\partial T}{\partial L} \left[(Q_t - \ell(t) L_t \cdot e^{mT}) e^{-rT} \right].$$

Der zweite Summand in (56) muß definitionsgemäß gleich Null sein, denn am Ende der Lebensdauer T hat der Lohn genau die Höhe erreicht, die zu einem Bruttoerlös von Null führt: $Q_t - \ell(t) e^{mT} = 0$. Die Veränderung der Lebensdauer T aufgrund eines variierten Arbeitseinsatzes ist ohne Bedeutung für die Bestimmung des Gegenwartswertes des maximalen Bruttoerlöses. Ein niedriges oder hohes T ist nur eine Art Nebenerscheinung der veränderten Kapitalintensität. Das ist auch deshalb verständlich, weil die Unternehmer nur am Maximum der abdiskontierten Bruttoerlössumme interessiert sind, nicht jedoch an einer 'optimalen' Lebensdauer der Anlage selbst. Zur Extremwertbestimmung muß der verbleibende Ausdruck in (56) gleich Null gesetzt werden. Hieraus läßt sich dann eine Beziehung zwischen der Grenzproduktivität der Arbeit und der Höhe des Lohnes an diesem Maschinenjahrgang aufstellen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \left[e^{rt} \cdot \frac{1}{r} e^{-rt} \right] \Big|_t^{t+T} &= \ell(t) \left[e^{-(m-r)t} \cdot \frac{1}{m-r} e^{(m-r)u} \right] \Big|_t^{t+T} \\ \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \left[-\frac{1}{r} (e^{-rT} - 1) \right] &= \ell(t) \left[\frac{1}{m-r} \cdot (e^{(m-r)T} - 1) \right] \\ (57) \quad \frac{\partial Q}{\partial L} &= \ell(t) \cdot \frac{r}{r-m} \cdot \frac{1 - e^{-(r-m)T}}{1 - e^{-rT}} \quad 1) \end{aligned}$$

Anders als in den bisherigen Modellen kann folglich jetzt der Lohn in jedem Zeitpunkt mit der Grenzproduktivität der Arbeit nicht mehr übereinstimmen. Die Grenzproduktivität der eingesetzten Arbeit übertrifft - wie in früherem Zusammenhang erläutert - die Höhe des bezahlten Lohnes. Da die einmal errichtete Anlage fixe Faktoreinsätze impliziert, nach (57) aber nur der Lohn sich in der Zeit verändert, kann der Lohn im Zeitablauf nur einmal kurz mit der Grenzproduktivität identisch sein. Bezeichnet man in (57) den zeitunabhängigen Faktor vereinfachend mit $c(T)$

$$(58) \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \ell(t) \cdot c(T) \quad ,$$

1) Vergl. Bronstein, J.N. und Semendjajew, K.A., Taschenbuch... a.a.O., S. 349.

so läßt sich dieser konstante Faktor als jene Größe interpretieren, die die unternehmerischen Erwartungen für die Zukunft widerspiegeln¹⁾. Durch die Annahme der ex-post Limitationalität wird zwangsläufig ein Handeln nach dem Grenzproduktivitätsprinzip aufgehoben werden. Voraussetzung hierfür ist eine vollkommene unternehmerische Voraussicht. Wählt nämlich der Unternehmer im Installationszeitpunkt einen Arbeitseinsatz, bei dem Grenzproduktivität der Arbeit und Lohn übereinstimmen, so wird bereits in der darauffolgenden Periode der Arbeitseinsatz sich als zu hoch erweisen. Die Limitationalität der Faktoren verhindert eine optimale Reallokation, der Arbeitseinsatz ist ineffizient und beschert nach Gleichung (56) keinen maximalen Bruttoerlös. Die Unternehmer müssen unter der Voraussetzung der ex-ante Substitutionalität und bei gegebener Produktionsfunktion den in der Zeit konstant wachsenden Lohn in ihr Kalkül miteinbeziehen. Nur wenn am Anfang eine unter dem realen Beitrag liegende Entlohnung vorgenommen wird, ist es in späteren Perioden möglich, über das Grenzprodukt hinaus zu entlohnen. Die Gewinnmaximierungsbedingung verlangt folglich den Einschluß der Zeitkomponente. Vermutlich wird die Handlungsweise der Unternehmer jetzt durch die Übereinstimmung von der über die Lebensdauer hinweg bestehenden (durchschnittlichen) Grenzproduktivität der Arbeit mit dem durchschnittlichen Lohn dieser Zeitspanne gesteuert. Das soll jedoch in späterem Zusammenhang noch untersucht werden. Wesentlich für eine derartige Beziehung ist sicherlich die Relation zwischen Kapitaleinsatz und Zinshöhe. Es scheint somit nicht ausgeschlossen, daß infolge dieser Investitionskriterien mit verschiedenen Faktorpreisen auch ganz unterschiedliche Verteilungen der Einnahmen auf Kapital und Arbeit verbunden sein müssen. Ist durch die Sparquote den Unternehmern der Kapitaleinsatz vorbestimmt, richten sich die Produktionsbedingungen nach einer Cobb-Douglas Funktion, besteht vollkommene Kenntnis der zukünftigen Lohnentwicklung, dann werden zur Erlangung eines maximalen Bruttoerlöses die Unternehmer ihren Arbeitseinsatz derart vornehmen, daß nach (58) die Grenzproduktivität der eingesetzten Arbeit gleich dem im Installationszeitpunkt herrschenden Lohn multipliziert mit einer Erwartungsgröße ist. Mit Hilfe von (58) läßt sich aus der Produktionsfunktion die optimale Arbeitsproduktivität der Maschinen bestimmen. Aus (2) folgt:

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 271.

$$(59) \quad \frac{Q_t}{L_t} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\partial Q}{\partial L} ,$$

so daß unter Miteinbeziehung von (58) sich für die Arbeitsproduktivität ein Wert von

$$(60) \quad \frac{Q_t}{L_t} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \ell(t) \cdot c(T)$$

ergibt. Die Durchschnittsproduktivität der Arbeit wird aber auch durch die am Ende der Lebensdauer vorliegende Übereinstimmung mit dem herrschenden Lohn festgelegt. Aus (14) folgt dann:

$$(61) \quad \frac{Q_t}{L_t} = \ell(t) \cdot e^{mT}$$

Mit Hilfe der zwei Gleichungen (60) und (61) mit den zwei Unbekannten Q_t/L_t und T läßt sich die Lebensdauer der Anlage in Abhängigkeit von den sie bestimmenden Größen feststellen:

$$(62) \quad c(T) \cdot e^{-mT} = 1-\alpha$$

Die als konstant angenommene Produktionselastizität der Arbeit entspricht dem konstanten (von T abhängigen) Erwartungswert, abdiskontiert mit der Fortschrittsrate, d.h. der Wachstumsrate des Lohnes. Unmittelbar einleuchtend ist, daß die Konstanz von $(1-\alpha)$ nur gewahrt werden kann, wenn auch T konstant ist.

Aus (62) bzw. (60) und (61) läßt sich durch Übertragung der Funktionen in ein $Q_t/L_t - T$ -Diagramm eine simultane Lösung für die Höhe der Durchschnittsproduktivität der Arbeit und der Lebensdauer finden. In Abbildung 22¹⁾ muß für alternative Werte von T die Durchschnittsproduktivität der Arbeit progressiv ansteigen. Dieser Sachverhalt spiegelt nur die Überlegung wider, daß Arbeitseinsatz L_t und Lebensdauer T in einer inversen Beziehung stehen, die gegenseitig keine Begrenzung aufweist. Die Funktion (60) impliziert dagegen, daß unter Berücksichtigung eines vorgegebenen konstanten Zinssatzes auch mit gegen Unendlich wachsender Lebensdauer die Durchschnittsproduktivität der Arbeit nicht in alle Unendlichkeit zunehmen kann, sondern nur so lange ansteigen wird, wie

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S.271.

die abdiskontierten Quasirenten auch anwachsen. Mathematisch läßt sich das dadurch beweisen, daß der konstante Erwartungsparameter für $T=0$ genau den Wert von Eins annimmt¹⁾. Der Lohn entspricht im Installationszeitpunkt damit wiederum genau der Grenzproduktivität der Arbeit. Für $T=0$ muß also Funktion (60) auf der Ordinate beim Wert $l(t) \frac{1}{1-\alpha}$ ansetzen. Mit $T \rightarrow \infty$ kann dagegen die Durchschnittsproduktivität nicht über die Höhe des Wertes $l(t)/(1-\alpha) \cdot r/(r-m)$ anwachsen. Aus diesen Kurvenverläufen wird deutlich, daß es nur eine einzige Lösung zur Bestimmung des optimalen Arbeits-einsatzes gibt.

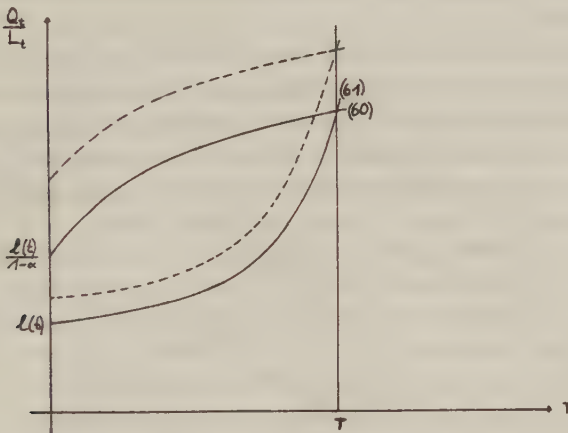


Abb. 22.

Die einzige Lösung für T und Q_t/L_t folgt auch aus Gleichung (62). Für $T=0$ ergibt sich auf der linken Seite genau ein Wert von Eins, für $T=\infty$ ein Wert von Null. Das sind aber im Rahmen einer linear-homogenen Produktionsfunktion die möglichen Werte der partiellen Produktionselastizitäten. Ist $(1-\alpha)$ mit einem konkreten Wert in der Produktionsfunktion vorgegeben, so bestimmt dieser bei vollständiger Voraussicht und rationalem unternehmerischen Verhalten die Höhe der Lebensdauer und der Arbeitsproduktivität.

In den Gleichungen (60) bis (62) kann nur der Lohn in der Zeit eine andere absolute Höhe aufweisen. Ist $l(t)$ in Abbildung 22 aber absolut höher, so entspricht das nach oben verschobenen Kurvenver-

¹⁾ Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 285 (Fußnote).

läufen beider Funktionen. Jetzt wird nur bei gestiegener Arbeitsproduktivität eine konstante Lebensdauer realisiert. Der höhere Lohn hat ex-ante die Wirkung eines geringeren Arbeitseinsatzes, welcher wegen der abnehmenden Grenzerträge der Arbeit die Durchschnittsproduktivität ansteigen läßt, d.h. Funktion (60) verläuft oberhalb der ursprünglichen Funktion. Aber auch nach (61) muß die Durchschnittsproduktivität ansteigen, denn wenn die Lebensdauer der Anlage unverändert bleiben soll, müssen sich Lohn und Durchschnittsproduktivität proportional entwickeln. Letzteres kann als erster Hinweis für die Entwicklung von Lohn und Arbeitsproduktivität in einem gleichgewichtigen Wachstumsprozeß mit konstantem T gewertet werden.

Die exakten Werte für die am betrachteten Maschinenjahrgang eingesetzten Arbeitsmengen und - bei vorgegebenem Kapitaleinsatz - des daraus resultierenden Outputs sind mit Hilfe der Produktionsfunktion (2) zu errechnen¹⁾. Dazu muß Gleichung (60) nach L_t aufgelöst und in die Produktionsfunktion eingesetzt werden. Für Q_t ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} Q_t &= e^{m(1-\alpha)t} \cdot K_t^\alpha \left[\frac{Q_t^{1-\alpha}}{c(T) \ell(t)} \right]^{1-\alpha} \\ Q_t &= e^{m(1-\alpha)t} \cdot K_t^\alpha \cdot Q_t^{1-\alpha} \left[\frac{1-\alpha}{c(T) \ell(t)} \right]^{1-\alpha} \\ \bar{Q}_t^\alpha &= e^{m(1-\alpha)t} \cdot K_t^\alpha \left[\frac{1-\alpha}{c(T) \ell(t)} \right]^{1-\alpha} \\ Q_t &= e^{\frac{m(1-\alpha)t}{\alpha}} \cdot K_t \left[\frac{1-\alpha}{c(T) \ell(t)} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ (63) \quad Q_t &= (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot K_t \left[\frac{e^{mt}}{c(T) \cdot \ell(t)} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \end{aligned}$$

Nach analogem Vorgehen folgt für den Arbeitseinsatz L_t , der den höchsten Bruttoerlös gewährleistet:

$$(64) \quad L_t = \left[\frac{(1-\alpha) e^{mt}}{c(T) \ell(t)} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \cdot K_t$$

Wie die Gleichungen (63) und (64) nachweisen, hängt der endgültige Wert des Outputs und des Arbeitseinsatzes von dem Kapitaleinsatz K_t ab.

Damit ist es Zeit zu klären, ob und unter welchen Voraussetzungen

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 272.

die Unternehmer bereit sind, Kapital genau in der Höhe von K_t einzusetzen.

In der Analyse blieb bisher nahezu unbeachtet, daß die autonom gegebenen Größen Zins und Kapitaleinsatz durchaus nicht unabhängig voneinander sind, denn der Zins ist ein wesentliches - im Modell sogar einziges - Kriterium für die Vornahme der Investition. Die durch die Sparquote vorbestimmte Kapitalmenge findet also auch nur bei einem ganz bestimmten Zinssatz ihre Realisation in Form von Investitionen. Dieser Zins, welcher ermöglicht, daß der durch s determinierte Teil des Einkommens in Investitionen überführt wird, sei im folgenden als gleichgewichtig bezeichnet. Unter der Annahme der ex-ante und ex-post Substitutionalität in Verbindung mit der Cobb-Douglas Funktion bestehen keine Schwierigkeiten, diesen Zins zu determinieren; er muß genau der Höhe der Grenzproduktivität des eingesetzten Kapitals entsprechen. Die ex-post Limitationalität dagegen läßt eine derartige Bestimmung des gleichgewichtigen Zinses nicht zu. Ein Ansatzpunkt zur Bestimmung des gleichgewichtigen Zinses bilden die weiterhin gültigen Prämissen des neoklassischen Modells. Aufgrund der linear-homogenen Produktionsfunktion und der Annahme der vollständigen Konkurrenz besitzt das Adding-up-Theorem Gültigkeit, wonach der gesamte Output vollständig auf die zu seiner Erstellung eingesetzten Faktoren verteilt wird, ohne daß ein Rest in Form eines Unternehmereinkommens verbleibt. Während der gesamten Lebensdauer einer Anlage fallen somit nur Einnahmen an, die den Faktoren Arbeit und Kapital zuzurechnen sind. Alle über die Lohnkosten hinausgehenden Einnahmen, d.h. die Bruttoerlöse, stellen somit Kosten bzw. Einkommen des Faktors Kapital dar.

Die Unternehmer, denen kein gesondertes Unternehmereinkommen zufließt, werden nur bereit sein, Kapital in der Produktion einzusetzen, wenn sie daraus eine mindestens dem Marktzins gleichwertige Verzinsung erhalten. Der interne Zinsfuß des Kapitals ergibt sich als Summe der Bruttoerlöse bezogen auf die Einsatzzeit des Kapitals. Diese interne Verzinsung stellt aber nichts anderes als die Grenzleistungsfähigkeit bzw. die Grenzproduktivität - von t bis $t+T$ als Durchschnittsgröße betrachtet - dar. Ein Vergleich des so ermittelten internen Zinses mit dem Marktzins entscheidet über die Durchführung der Investition. So lange der Marktzins

kleiner ist, erscheint die Investition lohnend und wird vorgenommen. Da jedoch wegen der Gültigkeit des Adding-up-Theorems aus den Investitionen kein Nettoerlös bezogen werden kann, müssen Marktzins und interner Zins übereinstimmen. Aus der Inbetriebnahme der Anlage wird nur eine Verzinsung gewonnen, die mit der Verzinsung am Markt übereinstimmt. Wenn nun die Summe der Bruttoerlöse einer Maschine mit ihrem internen Zins, der dem Marktzins gleich ist, abdiskontiert wird, hat die Maschine nur ihren Anschaffungswert wiederverdient. Die abdiskontierte Bruttoerlössumme wird dem Anschaffungswert der Maschine entsprechen.

Damit also im Installationszeitpunkt $sQ_t = K_t$ tatsächlich zum Einsatz gelangt, muß am Markt gerade ein solcher Zins herrschen, der mit der internen Verzinsung der K_t entsprechenden Maschine identisch ist. Oder umgekehrt formuliert: Der am Markt herrschende Zins führt dann zu einer Investition in Höhe von K_t , wenn die daraus zu gewinnende Verzinsung genau so hoch ist. Nur unter dieser Voraussetzung ist der gewünschte Gleichgewichtszustand verwirklicht, denn wenn z.B. im Zeitpunkt der Erstellung der Investition der Marktzins geringer ist als die über die Lebensdauer hinweg herrschende durchschnittliche Grenzproduktivität von K_t , dann wären die Unternehmer bereit, höhere als durch sQ_t bestimmte Mengen an Kapital zu investieren. Hier ist ein Gleichgewichtsmechanismus etwa derart denkbar, daß der Nachfrageüberhang den Marktzins auf die Gleichgewichtshöhe ansteigen läßt. Bei zu hohem Marktzins ergäbe sich die umgekehrte Reaktion.

Da der Zins von Anfang an im Modell allerdings konstant sein soll, verlangt das eine Höhe, die genau der internen Verzinsung der Anlagen entspricht. Der Kapitaleinsatz im Installationszeitpunkt stimmt dann genau mit der Summe der daraus erwachsenden Bruttoerlöse, abdiskontiert mit dem Zins, überein. Diese Identität von abdiskontierten Bruttoerlösen und Anschaffungswert stellt somit eine notwendige, aber auch durch die Modellprämissen gewährleistete Bedingung dar. Gleichgewicht in diesem Sinne bedeutet die Aufteilung des Einkommens auf die Faktoren und die Erfüllung der unternehmerischen Antizipationen.

Die in (55) abdiskontierten Bruttoerlöse lassen sich durch den Kapitaleinsatz K_t ersetzen¹⁾:

1) Kemp, M.C. and Thanh, P.C., On a Class...a.a.O., S. 266.

$$(65) \quad U_{t+T} = K_t \cdot \int_t^{t+T} (Q_t - \ell(t) e^{mT_u} L_t) e^{-r(u-t)} du$$

Die partielle Ableitung von U_{t+T} nach K_t ermöglicht es, die Veränderung der Bruttoerlöse und damit der Lebensdauer aufgrund verschiedener exogener Kapitaleinsätze festzustellen. Ihre Höhe richtet sich dabei nach (65). Der Klammerausdruck hinter dem Integral in (65) stellt den Bruttoerlös der Periode u ($u > t$) dar. Dieser hängt von der Wahl des Kapitaleinsatzes ab. Allerdings wird die Summe der Quasirenten mit verändertem Kapitaleinsatz aufgrund zweier verschiedener Einflüsse variieren: Einmal erhöht sich über die Produktionsfunktion mit zusätzlichen Kapitaleinheiten der Output Q_t , zum anderen verlangt der neue 'optimale' Kapitalstock auch eine andere Kombination mit Arbeit, da ja der Mehreinsatz an Kapital auch die Grenzproduktivität der Arbeit erhöht hat. Liegt diese aber bei gegebener Lohnhöhe über ihrem durch Gleichung (57) als optimal angesehenen Wert, so wird der Arbeitseinsatz bekanntlich steigen. Für die Ableitung folgt also:

$$(66) \quad \frac{dR_u(t)}{dK} = \frac{\partial R}{\partial K} + \frac{\partial R}{\partial L} \frac{dL}{dK} \quad 1)$$

Richtet man sich in der Ableitung von (65) nach der Regel (66), so ergibt sich

$$(67) \quad 1 = \frac{\partial U}{\partial K} = \int_t^{t+T} \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot e^{-r(u-t)} du + \frac{dL}{dK} \int_t^{t+T} \left[\frac{\partial Q}{\partial L} - \ell(t) e^{m(u-t)} \right] e^{-r(u-t)} du$$

Auch für den neuen, veränderten Kapitaleinsatz wird der Arbeitseinsatz derart variiert, daß die Summe der erwarteten abdiskontierten Quasirenten ihr Maximum erreicht, d.h. die partielle Ableitung $\frac{\partial U}{\partial L}$ muß gleich Null sein. In (67) kann demzufolge der zweite Summand weggelassen werden, denn er besteht - wie aus einem Vergleich mit (57) hervorgeht - aus $\frac{dL}{dK} \frac{\partial U}{\partial L}$. Für die Auflösung des restlichen Integrals folgt aus (67):

$$(68) \quad 1 = \frac{\partial U}{\partial K} = \frac{\partial Q}{\partial K} \left[-\frac{1}{r} \cdot e^{-r(u-t)} \right] \Big|_t^{t+T}$$

Mit den für u eingesetzten Grenzen zeigt sich, daß der Zins r

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 273.

von der Zeit unbeeinflusst bleibt. Die nur ex-ante festzustellende Grenzproduktivität des Kapitals ergibt sich als

$$(69) \quad \frac{\partial U}{\partial K} = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{r}{1-e^{-rT}}$$

Formulierung (69) macht deutlich, was im putty-clay Fall Übereinstimmung von Zins und Grenzproduktivität bedeutet. In jedem Augenblick der Produktion herrscht an der Maschine eine konstante Grenzproduktivität, die interne Verzinsung dagegen nimmt bis zum Ende der Lebensdauer kontinuierlich ab, da die Bruttoerlöse ständig sinken, der Kapitaleinsatz aber konstant bleibt. Nur auf die Lebensdauer übertragen, ist die Verzinsung der Anlage gleich ihrer Grenzproduktivität. Diese läßt sich ex-ante feststellen und damit ebenso wie beim Lohn durch einen entsprechenden geringeren Einsatz an Kapital kompensieren. Der Einfluß der Lebensdauer auf den Zins, besser gesagt, die gleichgewichtige Konstellation beider Größen zueinander, läßt sich aus (69) ablesen. Je höher T ist, um so eher stimmen Grenzproduktivität und Zins überein, d.h. für endliche Werte von T muß die Grenzproduktivität im Installationszeitpunkt r übertreffen, um so Vorsorge für jene Zeit zu treffen, in der r größer ist als die dann noch an der Maschine herrschende interne Verzinsung. Wenn T dagegen unendlich groß ist, dann ist - wie schon gezeigt - das Problem nicht mehr relevant.

Die aus der Produktionsfunktion zu ermittelnde Durchschnittsproduktivität

$$(70) \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{Q_t}{K_t}$$

ermöglicht wieder, aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die optimale Durchschnittsproduktivität abzuleiten:

$$(71) \quad \frac{Q_t}{K_t} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{r}{1-e^{-rT}}$$

Die Kapitalproduktivität der Anlage ist ebenfalls zeitunabhängig, was unter der Voraussetzung der ex-post Limitationalität auch zu erwarten war. Versteht man den zweiten Faktor auf der rechten Seite als durchschnittliche interne Verzinsung des Kapitals, so zeigt sich die große Ähnlichkeit mit dem einfachen neoklassischen Modell.

Die entscheidenden (abhängigen) Variablen im Modell sind somit die Faktorpreise, die für die Produktionsfunktion des einzelnen Jahrgangs die Höhe der Faktoreinsätze determinieren. Vom herrschenden Zins und Lohn hängt es ab, wieviel Einheiten die Unternehmer bereit sein werden einzusetzen, wenn sie über die zukünftige Entwicklung vollständige Kenntnis besitzen. Dieser Zusammenhang läßt sich an der optimalen Kapitalintensität ersehen, die aus (71) und (62) abzuleiten ist. Dazu wird Gleichung (62) durch (71) dividiert:

$$\begin{aligned} \frac{K_t \cdot r}{L_t \cdot \alpha (1 - e^{-rT})} &= \frac{1}{1 - \alpha} \cdot c(T) \ell(t) \\ \frac{K_t}{L_t} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \frac{1 - e^{-rT}}{r} \cdot c(T) \ell(t) \\ (72) \quad \frac{K_t}{L_t} \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} &= \ell(t) \frac{1 - e^{-(r-m)T}}{r(t) - m(t)} \end{aligned}$$

Es bestimmen also allein die Höhe des Zinses und des Lohnes den Wert der Kapitalintensität, denn alle anderen Variablen in (72) sind definitionsgemäß konstant. Ist der technische Fortschritt nicht kapitalgebunden und sind die Faktoren jederzeit substituierbar, dann fällt der Bruch auf der rechten Seite von (72) weg. Er kann wiederum als ein Ausdruck der Berücksichtigung der zukünftigen Entwicklung gedeutet werden. Ist das nicht der Fall, so ist $\frac{K_t}{L_t} \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha}$ den Grenzproduktivitäten der Faktoren gleich¹⁾. Die bisherigen Ergebnisse hinsichtlich der Determinanten der Produktionsmethode und der Lebensdauer T bezogen sich nur auf eine einzige, im Zeitpunkt t zu installierende Anlage. Bevor der Schritt zu einer wachsenden Wirtschaft vollzogen wird, ist es zum besseren Verständnis notwendig, das Verhältnis aller relevanten Variablen zueinander für den einzelnen Jahrgang aufzuzeigen.

3.6.8. Das Verhältnis der entscheidenden Variablen zueinander.

Wenn die Gleichungen (56) und (57) zugrundegelegt werden, so zeigt sich, daß bei irgendeinem vorgegebenen Kapitaleinsatz die Lebensdauer in entscheidendem Maße vom Arbeitseinsatz abhängig ist. Der Arbeitseinsatz richtet sich nach dem in diesem Zeitpunkt bestehenden Lohn. Damit die vorgegebene Kapitalmenge tatsächlich zum Ein-

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 273.

satz gelangt, muß der Marktzins mit der internen Verzinsung übereinstimmen. Lohnhöhe und Zinssatz in Verbindung mit den entsprechenden Faktoreinsätzen determinieren wiederum die endgültige Lebensdauer.

An einem Maschinenjahrgang kann bei exogen vorgegebenen Variablen Lohn und Zins nur bei einer ganz bestimmten Konstellation von Kapital- und Arbeitseinsatz in Verbindung mit einer ganz bestimmten Lebensdauer der Anlage ein Gleichgewicht herrschen, bei dem die unternehmerischen Erwartungen erfüllt werden. Bei gegebenem Zins muß sich der Kapitaleinsatz während der Lebensdauer wiedergewinnen lassen. Dieser Anschaffungswert muß bei bestehendem Lohn mit einem derartigen Arbeitseinsatz verbunden sein, daß die aus der Produktion resultierenden Bruttoerlöse, abdiskontiert für die Lebensdauer, ein Maximum ergeben. Der Arbeitseinsatz muß gleichzeitig bei Kenntnis der Höhe und der Entwicklung des Lohnes zu einem Abbau der Bruttoerlöse in T Perioden führen.

Diese Beziehungen dürfen nur statisch verstanden werden, d.h., es lassen sich keine Anpassungsprozesse ableiten. Jeder Variablen muß eine andere in einem ganz bestimmten Verhältnis zugeordnet sein, damit die Prämissen des Modells erfüllt werden. Die Berücksichtigung des unternehmerischen Verhaltens schafft nur die Möglichkeit, die Konstanz der Lebensdauer der Anlagen durch die unterschiedlichen Konstellationen der ökonomischen Variablen zu begründen.

In welcher Beziehung stehen nun Zins, Lohn, Kapitalintensität und Lebensdauer zueinander? Ein hoher Lohn wird die Unternehmer veranlassen, relativ geringe Arbeitsmengen einzusetzen. Zur Erstellung eines bestimmten Outputs wird so gesehen mit einer kapitalintensiven Produktionsmethode gearbeitet werden müssen. Damit aber der dazu notwendig hohe Kapitaleinsatz während der Lebenszeit T erwirtschaftet wird, muß je nach Dauer von T der Zins relativ hoch oder niedrig sein. Die Produktion mit verhältnismäßig hoher Kapitalintensität bewirkt einen hohen anfänglichen Bruttoerlös, der erst nach relativ langer Lebensdauer abgebaut wird. Da damit die Bruttoerlössumme verhältnismäßig hoch sein wird, kann der Anschaffungswert nur durch Abdiskontieren mit einem relativ niedrigen Zinssatz wiedergewonnen werden.

Da keine Anpassungsprozesse beschrieben werden können, zeigt sich

an der Beschreibung der Konstellation aller Variablen zueinander die ganze Schwierigkeit einer vernünftigen ökonomischen Interpretation. Da jede Variable in einem bestimmten Verhältnis zu allen Variablen steht, kann nur die gemeinsame Konstellation analysiert werden. Die sonst so hilfreiche ceteris-paribus Methode ist hier nicht anzuwenden. Deshalb können die oben aufgezeigten Relationen nur als Tendenzen verstanden werden, die angeben, ob höhere Werte einer Variablen mit ebenfalls höheren oder niedrigeren Werten der übrigen Variablen gekoppelt sein müssen.

Abschließend sei dem Verteilungsaspekt ein kurzer Hinweis gewidmet. In jedem Augenblick während der gesamten Lebensdauer eines Anlagenjahrgangs besteht eine andere Verteilung des Outputs auf Arbeit und Kapital. Der kontinuierlich steigende Lohn verändert mit dem Älterwerden der Maschinen die augenblickliche Verteilung zugunsten der Arbeit. In den ersten Perioden fällt der Großteil der Produktion dem Kapital in Form von Bruttoerlösen zu, die Arbeit bezieht dagegen nur einen relativ geringen Anteil. Je älter die Anlage wird, um so stärker ändert sich diese Situation. Irgendwo wird für einen kurzen Moment der Bruttoerlös genau der am Markt zu erzielenden Verzinsung gleich sein. Davor ist die interne Verzinsung höher, danach geringer. Es liegt folglich nahe, daß die Lebensdauer des Anlagenjahrgangs einen wichtigen Einfluß auf die Verteilung von Lohn- und Zinskosten ausübt. Diesem Verteilungsaspekt wird vor allem in einer wachsenden Wirtschaft Beachtung zu schenken sein.

Diese Erkenntnisse sollen im folgenden auf eine unter putty-clay Bedingungen wachsende Wirtschaft übertragen werden, so daß es möglich sein wird, die bei der Behandlung der Lebensdauer als ökonomische Variable anfallenden Größen auf ihre Abhängigkeit hin zu untersuchen. Wie die Verwendung von T als Parameter bestätigte, kommt eine mit der Rate $m+n$ sich gleichgewichtig entwickelnde Wirtschaft nur dann zustande, wenn die Lebensdauer der Anlagen konstant ist. Im Gegensatz zum früheren Ansatz soll nun im folgenden versucht werden, diese Konstanz durch die T determinierenden Größen zu begründen und vor allem die bei unterschiedlichen Werten notwendigen Konstellationen aufzuzeigen.

3.6.9. Gleichgewichtiges Wachstum bei alternativer Höhe der Determinanten der Lebensdauer.

Die Behandlung der Lebensdauer als ökonomische Variable macht abschließend noch die Bestimmung der drei Unbekannten: Einkommensanteil, Lebensdauer und Grenzproduktivität des Kapitals für eine wachsende Wirtschaft notwendig. Eine Lösung ist nur mit Hilfe dreier Gleichungen mit drei Unbekannten zu finden¹⁾.

Das Verbindungsglied zwischen Lohnsatz und Lebensdauer ist die ex-post Identität von Lohnkosten und Gesamtkosten:

$$(73) \quad l(t+T) \cdot L_t = Q_t$$

Wenn auf dem Gleichgewichtspfad die Produktion mit einer Rate $m+n$ zunimmt, die Arbeit sich nur gemäß der exogenen Rate n erhöht, dann muß zur Erfüllung der Gleichung (73) $l(t)$ mit der Rate m angewachsen sein.

Die in t eingesetzte Arbeit ergibt sich aus (23) als

$$L_t = nL_0 \frac{e^{nt}}{1 - e^{-nT}}$$

Analog muß sich das in t produzierte Einkommen Y_t durch

$$(74) \quad Q_t \cdot Y_t = (m+n) Y_0 \frac{e^{(m+n)t}}{1 - e^{-(m+n)T}}$$

bestimmen. Die gesamte an allen Anlagen beschäftigte Arbeit muß vom Anfangswert L_0 bis zum Betrachtungszeitpunkt t entsprechend der exogenen Rate n auf

$$(75) \quad L = L_0 e^{nt}$$

angewachsen sein. Desgleichen hat sich das Einkommen in t auf

$$(76) \quad Y = Y_0 e^{(m+n)t}$$

entwickelt.

Die Gleichungen (75) und (76) determinieren die Gesamtgrößen von Arbeitseinsatz und Einkommen, die Gleichungen (23) und (74) die in

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 277.

t an der neu installierten Anlage eingesetzte Menge an Arbeit und das neu produzierte Einkommen. Mit Hilfe der Gleichungen (75) und (76) sind gesamtwirtschaftliche Aussagen möglich. Unter Verwendung dieser Gleichungen und unter Berücksichtigung von (23) und (74) läßt sich aus der Bedingung (73) der Lohnsatz als Funktion der gesamtwirtschaftlichen Durchschnittsproduktivität Y/L ableiten:

$$(77) \quad \frac{(m+n)Y \cdot \frac{1}{1-e^{-(m+n)T}}}{nL \cdot \frac{1}{1-e^{-nT}}} = \ell(t) e^{-mT}$$

Nach $\ell(t)$ aufgelöst:

$$(78) \quad \ell(t) = \frac{m+n}{n} \cdot \frac{1-e^{-nT}}{1-e^{-(m+n)T}} \cdot \frac{Y}{L} \cdot e^{-mT} = b(T) \cdot e^{-mT} \frac{Y}{L}$$

Gleichung (78) ist die erste der drei Gleichungen, die verhilft, die oben genannten Unbekannten zu bestimmen.

In einer zweiten Gleichung muß eine Beziehung zwischen Lebensdauer und dem durch sie mitbestimmten Zinssatz hergestellt werden. Hierzu bietet sich die Bestimmungsgleichung für die Kapitalproduktivität des neu installierten Jahrgangs an, da der Kapitaleinsatz gemäß der Sparfunktion sY aus dem Gesamteinkommen dieses Augenblicks resultiert. Gleichung (71) gestattet folgende Umformulierung:

$$(79) \quad \frac{Y_t}{sY_t} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{r}{1-e^{-rT}}$$

Das Einkommen bzw. der Output des neuen Jahrgangs Y_t läßt sich nun aus den Gleichungen (74) und (76) zur Formulierung des Gesamteinkommens umwandeln, da $Y_t = Y(m+n)/(1-e^{-(m+n)T})$ ist $Y = Y_t(1-e^{-(m+n)T})/(m+n)$. Eingesetzt in (79):

$$(80) \quad \frac{\alpha}{s} = \frac{r}{m+n} \cdot \frac{1-e^{-(m+n)T}}{1-e^{-rT}} = f(T) \quad 1)$$

Formulierung (80) stellt die zweite gesuchte Bestimmungsgleichung dar.

Schließlich fehlt eine Beziehung, die die unternehmerischen Entscheidungen in ihrer Abhängigkeit von Lohn und Zins berücksichtigt.

1) Siehe hierzu: Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 278.
Kemp, M.C. and Thanh, P.C., On a Class...a.a.O., S. 266.

Hierzu eignet sich (60), wonach die Arbeitsproduktivität der neuen Anlage vom Lohn und dem den Zins einschließenden Erwartungsparameter abhängig gemacht wird. Allerdings bedarf (60) einer Umformulierung, die die Betrachtung durch die gesamtwirtschaftlichen Beziehungen repräsentierenden Gesamtgrößen (75) und (76) erweitert:

$$\frac{Y}{L} = \frac{\frac{m+n}{1-e^{-(m+n)T}}}{\frac{n}{1-e^{-nT}}} = \frac{c(T) \cdot \ell(u)}{1-\alpha}$$

$$(81) \quad \frac{Y}{L} = \frac{m+n}{n} \cdot \frac{1-e^{-nT}}{1-e^{-(m+n)T}} = \frac{c(T) \cdot \ell(u)}{1-\alpha}$$

$$(82) \quad \frac{Y}{L} = \frac{c(T) \cdot \ell(u)}{b(T) \cdot (1-\alpha)} \quad 1)$$

Dies ist die letzte Gleichung zur Bestimmung der drei gesuchten Unbekannten.

Mit Hilfe der Gleichungen (78), (80) und (82) lassen sich Aussagen über die Lebensdauer, den Zins und die Einkommensverteilung einer sich unter putty-clay Bedingungen gleichgewichtig entwickelnden Wirtschaft vornehmen.

Zuvor sei jedoch der Wachstumsprozeß selbst Gegenstand der Untersuchung. Bei 'gleichgewichtiger' Anfangsbedingung (26) wächst das Einkommen von Anfang an mit der Rate $m+n$, d.h. mit den exogen bestimmten Wachstumsraten von Arbeit und kapitalgebundenem technischen Wissen. Störungsfrei bleibt diese Entwicklung nur in Verbindung mit einer unveränderten Lebensdauer der das Einkommen produzierenden Jahrgänge. Denn selbst bei Konstanz von m und n können bei unterschiedlich langer Nutzung der Maschinen diese Raten keine gleichgewichtige Entwicklung gewährleisten, da dann die Balance zwischen neu installierter Maschine und ausscheidender Maschine nicht mehr aufrechterhalten werden kann. Jede verschrottete Anlage bewirkt eine Reduzierung des Gesamteinkommens und der eingesetzten Arbeit. Diese Arbeit findet an neuen Jahrgängen wieder Verwendung. Erfolgen diese Prozesse infolge einer variablen Lebensdauer in ungleichmäßigen Zeitabständen, dann ist eine konstante Wachstumsrate der Arbeit und des Einkommens unmöglich. Wenn dagegen T im Wachstumsprozeß gleich bleibt, dann entsprechen sich Zuwachs und Abnahme des Einkommens derart, daß das Verhältnis zwischen beiden konstant ist. Ebenso ist es mit

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 278.

der an neuen Anlagen einzusetzender Arbeit: exogen bestimmt entwickelt sich L mit der Rate n zuzüglich der freigesetzten Arbeit, die ebenfalls - nur um T Perioden absolut niedriger - mit der Rate n anwächst.

Diese Entwicklung von Arbeit und Einkommen ist geradezu notwendig, damit T konstant bleiben kann. Der Fortschritt ruft in jedem Installationszeitpunkt einen höheren absoluten Lohn hervor, der den Anlaß gibt, eine kapitalintensivere Produktionsmethode einzuschlagen. Die höhere Kapitalintensität ist bei konstanter Sparquote nur zu realisieren, wenn das Einkommen überproportional zum Arbeitswachstum zugenommen hat. Das ist durch den Embodiment-Effekt möglich, da die neu investierten Kapitalmengen, gemessen an denen der vorangegangenen Periode, von höherer Effizienz sind, die eine überproportionale Einkommenserhöhung möglich gemacht hat. Ist aber in der vorangegangenen Periode das Einkommen auch überproportional gestiegen, so steigt bei konstanter Sparquote auch jetzt wieder der Kapitaleinsatz in jenem Maße, welches zur Beschäftigung der einsatzbereiten Arbeit erforderlich ist. Hieraus resultiert dann wieder eine Einkommenserhöhung von $(m+n)$ -Prozent. Anders ausgedrückt: Ein wachsender Lohn ruft nur dann einen höheren Kapitaleinsatz hervor - der zur Erhöhung der Effizienz der Arbeit proportional zum Lohnsatz für die Konstanz von T unbedingt notwendig ist -, wenn entsprechend der Cobb-Douglas Funktion substituiert wird, d.h. ein höherer Kapitaleinsatz bei relativ niedrigerem Arbeitseinsatz durchgesetzt wird. Ist das aber der Fall, dann wachsen Output und Lohnkosten in einem derartigen Verhältnis, daß auch die Bruttoerlöse ansteigen, so daß diese wiederum nach T Perioden durch den von einem höheren Niveau ansteigenden Lohn kompensiert werden. Die absolut höheren Bruttoerlöse garantieren im Zusammenhang mit dem konstanten Zins ein Wiedererlangen des eingesetzten Kapitals nach Ablauf der Lebensdauer.

Auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad besteht also eine eindeutige Beziehung der relevanten Variablen. Ihr Verhältnis zueinander ist durch den anfänglichen Lohn und Zins festgelegt. Diese beiden Größen determinieren allen anderen Variablen, sofern eine bestimmte Lebensdauer eingehalten werden soll und lassen ihnen für den Gleichgewichtspfad nur einen bestimmten Wert zukommen. Mit jeder Lohnhöhe und jedem Zinssatz ist für ein vorgegebenes T

ein Wachstum mit der Rate $m+n$ zu verwirklichen, so daß die Konstellation der Variablen nicht unbedingt Zeichen eines Ungleichgewichts ist. Anpassungsprozesse führen immer wieder zum Gleichgewichtspfad. Allerdings wird sich damit das Niveau des Einkommens verschieben.

Wächst das Einkommen um $(m+n)$ -Prozent, so erhöht sich auch der Kapitalstock gemäß dieser Rate. Die Kapitalproduktivität ist unabhängig von der Zeit (verl. (71)). Das Arbeitspotential erhöht sich dagegen nur um n -Prozent, so daß die Durchschnittsproduktivität der Arbeit ständig steigt (vergl. (61)). Die abnehmenden Grenzerträge des überproportional wachsenden Faktors Kapital werden durch die immer effizientere Arbeit kompensiert. Die Durchschnittsproduktivität der Arbeit, gemessen in Effizienzeinheiten, bleibt konstant. Die Zunahme der Effizienz der Arbeit muß bei um $(m+n)$ -Prozent wachsendem Einkommen und mengenmäßig mit n wachsender Arbeit genau der Fortschrittsrate entsprechen. Da die Fortschrittsrate aber auch mit der Wachstumsrate des Lohnes identisch ist, muß die Lebensdauer der Anlagen konstant bleiben.

Diese allgemeine Darstellung der Geschehnisse auf dem gleichgewichtigen Wachstumspfad soll nun durch die Betrachtung alternativer Konstellationen der Variablen r , T , K/L ihren Abschluß finden.

3.6.10. Die Beziehungen zwischen Zins und Lebensdauer.

Aus Gleichung (76) folgt für die Verteilung des Lohneinkommens:

$$(83) \quad \frac{L \cdot \ell(t)}{Y} \cdot b(T) \cdot e^{-mT}$$

Nach Gleichung (62) muß diese aber auch

$$(84) \quad \frac{L \cdot \ell(t)}{Y} \cdot (1-\kappa) \frac{b(T)}{c(T)}$$

entsprechen. Da die Einkommensverteilung erst in späterem Zusammenhang Erklärung finden soll, kann durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (83) und (84) eine Formulierung gefunden werden, die die Beziehungen zwischen dem Zins und der Lebensdauer erkennen läßt¹⁾:

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 279.

$$(85) \quad c(T) = (1-\alpha) \cdot e^{mT}$$

Gleichung (85) nach der Produktionselastizität der Arbeit aufgelöst und durch die Rückführung von $c(T)$ in die ursprüngliche Form umgewandelt, ergibt:

$$(1-\alpha) = c(T) \cdot e^{-mT}$$

$$(1-\alpha) = \frac{r}{r-m} \cdot \frac{1 \cdot e^{-(r-m)T}}{1 \cdot e^{-rT}} \cdot e^{-mT}$$

$$(86) \quad (1-\alpha) = \frac{r}{r-m} \cdot \frac{e^{(r-m)T} - 1}{e^{rT} - 1} \quad 1)$$

Für eine konstante Produktionselastizität der Arbeit ($1-\alpha$) und eine invariante Wachstumsrate des technischen Wissens m läßt sich aus (86) eine inverse Beziehung zwischen Zins und Lebensdauer ablesen²⁾. Eine hohe Lebensdauer der Anlagen ist also nur in Verbindung mit einem niedrigen Zinssatz möglich und umgekehrt. Diese Beziehung zwischen Zins und Lebensdauer scheint geradezu allen kapitaltheoretischen Erörterungen zu widersprechen, denn normalerweise wird von einer positiven Korrelation zwischen Zinshöhe und Lebensdauer der Maschinen ausgegangen. Ein hoher Zinssatz gilt als Zeichen relativer Kapitalknappheit und damit geringer Investitionstätigkeit, was wiederum mit einer langen Ausnutzungszeit der Anlagen einhergeht. Dem widerspricht eindeutig Beziehung (86). Der 'unlogische' Zusammenhang wird jedoch sofort klarer, wenn man sich des komplexen Begriffs der modernen Anlage bewußt wird³⁾. Daß keine eindeutige Relation zwischen Alter und Effizienz einer Maschine besteht, ist der Annahme des kapitalgebundenem technischen Fortschritts in Verbindung mit ex-ante Substitutionalität und ex-post Limitationalität zuzuschreiben. Je jünger eine Maschine ist, d.h. je kürzer ihre Lebensdauer, um so höher muß auch ihre Effizienz sein. Aber dem geringeren Zins, der eventuell die Lebensdauer der Anlagen niedrig halten könnte, steht die - bei niedrigem Zins - durch den hohen Lohn hervorgerufene Substitution von Arbeit und Kapital entgegen. Je

1) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen...a.a.O., S. 37.

2) Einen genauen mathematischen Beweis hierzu hat von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen...a.a.O., S. 38/39 geliefert.

3) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen...a.a.O., S. 40.

Über jedoch die Kapitalintensität ist, um so geringer sind die anfallenden Lohnkosten, d.h. um so länger dauert es, bis die Produktion von den Lohnkosten voll kompensiert wird. Der geringe Zins hat durch sein Pendant, den höheren Lohn, eine lebensverlängernde Wirkung.

Der hinter einem hohen Lohn verborgene Substitutionseffekt mit seiner Beeinflussung von Zins und Lebensdauer läßt sich am besten mittels eines Vergleichs alternativer Investitionsvorgänge in einem Zeitpunkt t beschreiben¹⁾. Beide Situationen mögen sich nur dadurch unterscheiden, daß in einem Fall A ein um 10% höherer Lohn als im Fall B bestehe. Alle anderen Bedingungen seien identisch.

Der in beiden Fällen vor die Wahl der Produktionsmethode gestellte Unternehmer wird zur Vermeidung der in A höheren Lohnkosten den Arbeitseinsatz (relativ) vermindern. Um den gewünschten Output Q dennoch erstellen zu können, wird er entsprechend der durch die Cobb-Douglas Funktion implizierten Substitutionselastizität von Eins den Arbeitseinsatz bei 10% höherem Lohn um 10% senken. Das bestehende Faktorpreisverhältnis gibt das Maß der Erhöhung des Kapitaleinsatzes an. Die linear-homogene Produktionsfunktion mit $\epsilon = 1$ garantiert die Konstanz der Einkommensverteilung. Obwohl durch den Substitutionseffekt die Lohnsumme konstant geblieben ist, kommt es zu einer Erhöhung der Lebensdauer und gleichzeitiger Zinssenkung. Der gestiegene Kapitaleinsatz bewirkt eine stärkere Verbreitung des in ihm verkörperten technischen Fortschritts, welche sich in einer Erhöhung des Outputs niederschlägt. Damit aber dieser höhere Output durch die konstant wachsende Lohnsumme kompensiert wird, muß eine längere Zeit als früher vergehen. Die die Lebensdauer bestimmende Differenz zwischen Arbeitsproduktivität und Lohnhöhe hat sich aufgrund des Embodiment-Effektes überproportional zum Lohn erhöht, so daß bei weiterhin gleicher Wachstumsrate des Lohnes die Lebensdauer steigt. Diese Zunahme der Lebensdauer ist andererseits Ursache dafür, daß durch das im 'Kapitalbereich' notwendige Gleichgewicht der Zins sinkt. Dem höheren Kapitaleinsatz steht eine größere Bruttoerlössumme gegenüber, die bei konstantem Zins in der längeren Lebensdauer eine über den Anschaffungswert hinausgehende Verzinsung ergeben würde. Das Gleichgewicht im Kapitalektor wäre gestört. Es muß folglich

1) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen...a.a.O., S.40.

ein geringerer, wieder 'gleichgewichtiger' Zins herrschen. Der Substitutionseffekt in Verbindung mit dem Embodiment-Effekt ist also Ursache dieser ungewöhnlichen, inversen Beziehung zwischen Lebensdauer und Zins. Das aber kann Zweifel an der Berechtigung erwecken, das Modell auf der Grundlage der Cobb-Douglas Funktion mit einer Substitutionselastizität von Eins zu entwickeln. Eine statistische Messung der Substitutionselastizität würde im vorliegenden Fall ein ϵ von größer als Eins aufweisen. Das erklärt sich daraus, daß bisher Substitutionseffekt und Embodiment-Effekt nebeneinander getrennt betrachtet wurden. Der Embodiment-Effekt selbst stellt jedoch eine Art von Substitution dar, der die Form einer zeitlichen Umstrukturierung besitzt, denn die aus ihm erwachsende Effizienz ließe sich auch durch eine einfache Mengenerhöhung kompensieren¹⁾.

Diese Beziehungen zwischen Zins und Lebensdauer der Anlagen können natürlich nicht ohne Einfluß auf die Einkommensverteilung bleiben, denn eine tatsächliche Substitutionselastizität von größer als Eins wird in Ungleichgewichtssituationen immer zu Verteilungsänderungen führen.

3.6.11. Die Beziehungen zwischen Einkommensverteilung, Zins und Lebensdauer.

Die das Verhältnis von Zins und Lebensdauer ausdrückende Formulierung (86) ergab sich aus den die Höhe des Lohnanteils beschreibenden Gleichungen (83) und (84). So zeigt allein schon Gleichung (83), daß bei höherer Lebensdauer der Anlagen dem Lohnneinkommen ein geringerer Anteil am Gesamteinkommen zukommen muß. Durch Auflösung von $b(T)$ in (83) folgt daraus:

$$(87) \quad \frac{L \ell(t)}{Y} = \frac{m+n}{n} \cdot \frac{e^{nT} - 1}{e^{(m+n)T} - 1} \cdot \frac{e^{(m+n)T}}{e^{nT}} \cdot e^{-mT}$$

$$(88) \quad \frac{L \ell(t)}{Y} = \frac{m+n}{n} \cdot \frac{e^{nT} - 1}{e^{(m+n)T} - 1}$$

Die mit der höheren Lebensdauer verbundene, für das Lohnneinkommen ungünstigere Verteilung ist verhältnismäßig einfach zu erklären. Betrachtet man die Situation an nur einer einzigen Maschine, so wird aus dem vorangegangenen klar, daß eine höhere Lebensdauer

1) von Weizsäcker; C.Ch., Zur ökonomischen...a.a.O., S. 41

dieser Maschine mit höherem Lohn und geringerem Arbeitseinsatz in Verbindung stehen muß. Gleichzeitig hat jedoch der mit dem Substitutionseffekt gekoppelte Embodiment-Effekt die Produktion der Maschine überproportional zur Arbeitsverminderung (die sich ihrerseits proportional zum höheren Lohn verhält) gesteigert. Während also in der ersten Periode diese Maschine gleiche Lohnkosten wie bei einer geringeren Lebensdauer aufweist, ist der Bruttoerlös um den Produktionszuwachs angestiegen. Die interne Verzinsung der ersten Periode ist gegenüber dem Fall mit kürzerer Lebensdauer ebenfalls größer geworden, da die neuen Kapitaleinheiten durch den in ihnen verkörperten Fortschritt den Output auch überproportional zu ihrer Erhöhung vermehrt haben. Das gilt nun für die gesamte Lebensdauer. Am Ende der kürzeren Lebensdauer sind die Lohnkosten genauso hoch, aber der aufgrund des gestiegenen Outputs höhere Bruttoerlös, d.h. genau jener Zuwachs zum Bruttoerlös infolge der gestiegenen Produktion, besteht noch. Erst in der verlängerten Lebensdauer wird er durch die weiterhin steigende Lohnsumme kompensiert. Die Lohnsumme der Anlage erhöht sich nur wenig, die Bruttoerlöse partizipieren zum überwiegenden Teil vom höheren Einkommen. Die Aufteilung hat sich zugunsten des Faktors Kapital verschoben. Dieses Ergebnis entspricht genau den Erwartungen hinsichtlich der Verteilungsänderung im Fall einer Substitutionselastizität von größer als Eins.

Die Geschehnisse an einem Jahrgang lassen sich für eine mit gleichgewichtiger Rate wachsende Wirtschaft übernehmen. Bei konstanter Lebensdauer T besteht auf dem Wachstumspfad eine konstante Einkommensverteilung. Die Struktur der Jahrgänge bleibt unter den Voraussetzungen störungsfreien Wachstums immer unverändert. Der Altersaufbau und das Durchschnittsalter der Anlagen¹⁾ ist konstant. Einkommen und Lohnkosten wachsen beide mit der Rate $m+n$. Bleibt infolgedessen der Einkommensanteil der Arbeit konstant, so kann sich wegen des geltenden Adding-up-Theorems auch nicht der durch die anfängliche Zins- und Lohnhöhe bestimmte Kapitalanteil am Einkommen verändern. Wenn dagegen auf einem Gleichgewichtspfad die Maschinen länger in Betrieb sind, so ist hierfür eine andere Konstellation der übrigen Variablen notwendig. Diese bewirkt dann auch eine zugunsten des Faktors Kapital verschobene Verteilung. Diese Verteilung ändert sich während des gleichgewichtigen Wachs-

1) Siehe hierzu: Allen, R.C.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 298 f.

tumsprozesses nicht.

Da Zins und Lebensdauer negativ korrelieren, läßt sich nach dem bisher gesagten die Auswirkung alternativer Zinssätze auf die Einkommensanteile leicht beschreiben. Ein hoher Zins ist das Kennzeichen einer kurzen Lebensdauer und damit eines verhältnismäßig kleinen Anteils des Kapitaleinkommens. Je niedriger der Zins ist, um so günstiger ist die Situation für das Kapital.

Der putty-clay Vintage-Fall offenbart damit ein neues Ergebnis im Vergleich zu allen anderen Modellen. Auf dem Gleichgewichtspfad herrscht zwar eine konstante Einkommensverteilung, aber diese ist je nach der Konstellation der Variablen unterschiedlich, obwohl die Produktionselastizitäten der zugrundegelegten Produktionsfunktion konstant sind. Die Cobb-Douglas Funktion bestimmt nicht mehr allein die Verteilung gemäß des realen Beitrages der Faktoren. Ursache kann nur die durch die ex-post Limitationalität notwendige Gewinnmaximierungsbedingung sein, die unter der Berücksichtigung der Lebensdauer ein Abgehen von der Übereinstimmung der Grenzproduktivität mit dem Faktorpreis im Installationszeitpunkt bedingt.

Da aber mit verschiedenen Zinssätzen (d.h. auch verschiedenen T) ganz unterschiedliche Verteilungen möglich sind, kann die bei ganz bestimmten 'gleichgewichtige' Verteilung als Sonderfall mit den Produktionselastizitäten übereinstimmen. Wie sich aus (88) ableiten läßt, ist das der Fall, wenn der Zins genau von der Höhe der Wachstumsrate des Einkommens auf dem Gleichgewichtspfad ist:

$$(89) \quad \frac{L \cdot \ell(t)}{Y} \cdot \frac{r}{r-m} \cdot \frac{e^{(r-m)T} - 1}{e^{rT} - 1} = (1-\alpha).$$

Die rechte Seite von (89) ist identisch mit der rechten Seite von (86), so daß sie sich durch die Produktionselastizität der Arbeit ersetzen läßt. Dann muß auch der Anteil des Kapitals durch α determiniert sein. Wenn diese Verteilung zustandekommt, dann muß auch die Sparquote s mit dem Wert der Produktionselastizität der Arbeit übereinstimmen, wie sich aus (80) für $r=m+n$ ableiten läßt. Nur wenn Wachstumsrate und Zins von gleicher Höhe sind, ist die Verteilung mit der durch die Exponenten der Cobb-Douglas Funktion (für jeden einzelnen Jahrgang) bestimmten identisch. Aber alle anderen Konstellationen sind auf dem Wachstumspfad ebenfalls mög-

lich, (89) stellt nur einen willkürlich eintretenden Sonderfall dar. Hat z.B. α einen Wert von 60%, so wird mit einem Zinssatz, der kleiner ist als die Wachstumsrate, eine Verteilung des Einkommens realisiert, die dem Kapital einen höheren Anteil zuspricht. Umgekehrt wird mit höherem Zins der Kapitalanteil geringer sein. Nur wenn Zins und Wachstumsrate übereinstimmen, bezieht auch das Kapital 60% des Outputs. Ist das jedoch der Fall, dann haben die in Betrieb befindlichen Anlagen eine derartige Lebensdauer, daß der über die Produktionselastizität hinausgehende Einkommensanteil des Kapitals an den jüngeren Jahrgängen durch den gemessen an α unterproportional verdienenden älteren Jahrgängen genau kompensiert wird¹⁾. Das Arbeitseinkommen ist umgekehrt an den neuen Jahrgängen geringer als der durch $(1-\alpha)$ bestimmte Betrag, wird aber ebenfalls durch den überproportionalen Anteil an älteren Jahrgängen ausgeglichen. Ist dagegen die Lebensdauer der Anlagen größer, so werden über mehr Perioden hinweg die Arbeitseinheiten Einkommen beziehen, die unter ihrem realen Beitrag zum Output liegen, so daß diese durch die überproportionalen Verdienste in den bis zum Lebensende folgenden Perioden nicht zum Ausgleich genügen. Jetzt hat sich die Verteilung für den Faktor Arbeit verschlechtert, gemessen an seiner Produktionselastizität ist er unterbezahlt. Da die konstante Lebensdauer zu einem Durchschnittswert im Betrachtungszeitpunkt führt, in dem immer eine konstante Zusammensetzung aller Jahrgänge besteht, wird auch in diesem Moment des Wachstumsprozesses der aggregierte Faktor weniger als seinen realen Beitrag verdienen.

Diese Konstellation verdeutlicht, warum nur bei $r=m+n$ die Faktoren einen Einkommensanteil nach der Höhe der Produktionselastizitäten α und $(1-\alpha)$ beziehen. Die zusätzliche Investition sY erhöht den Kapitalstock nach Maßgabe der Sparquote. Auf dem Gleichgewichtspfad entspricht diese Investition der Summe der in t anfallenden Bruttoerlöse. Da nach (80) für einen über α hinausgehenden Einkommensanteil des Kapitals die Sparquote höher ist als α , bedeutet das eine Investition der Unternehmer, die über ihren realen Beitrag zum Produkt hinausgeht. Wenn aber aus einem bestimmten Einkommen immer wieder ein Prozentsatz dem Kapitalstock zugeführt wird, der den Beitrag des Kapitals gemäß der Produktionselastizität übertrifft, gleichzeitig diese Neuinvestition aber

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 261.

Kemp, M.C. and Thanh, P.C., On a Class...a.a.O., S. 270.

sich selbst finanzieren soll, so muß das Kapital immer einen Anteil des Einkommens besitzen, der größer ist als seine Produktionselastizität. Daß diese Konstellation auf dem Gleichgewichtspfad möglich ist, ist auf die Berücksichtigung der Lebensdauer zurückzuführen. Das eingesetzte Kapital gewinnt seinen Anschaffungswert nur wieder, wenn bei gegebenem Zins T die entsprechende Länge aufweist. Bei genügend langer Lebensdauer wird auch bei niedrigem Zins durch die Bruttoerlöse der Anfangswert der Anlage wiederzu-erlangen sein. Dieser Anfangswert nunmehr bedeutet einen Anteil des Kapitals von mehr als α , weil mit dem hohen Kapitaleinsatz der Embodiment-Effekt sich stark auswirkt. Dieser Effekt wird jedoch in dem konstanten Wert von α nicht berücksichtigt. Nicht die Einkommensverteilung als solche entspricht nicht den Produktionselastizitäten, sondern die Produktionsfunktion müßte im Wert von α und $(1-\alpha)$ den kapitalgebundenen Fortschritt berücksichtigen. Der Zusammenhang von α und s wird damit auch klarer. Eine Sparquote, die größer als α ist, bedeutet nur, daß den Investoren bei vollständiger Voraussicht die tatsächliche Veränderung des Outputs bekannt ist; die Einkommensverteilung wird von ihnen deshalb auch nicht als ungerecht (gemessen an α) empfunden werden. Sie partizipieren an dem durch ihre Investitionstätigkeit bedingten hohen Anteil am Einkommen.

Damit ergibt sich ein anderes Problem. Die Sparquote ist zwar wiederum ohne Einfluß auf die Wachstumsrate, jedoch ihre Variation verlangt auch eine andere Konstellation der übrigen Variablen zueinander.

3.6.12. Die Beziehungen der Sparquote zu den anderen Variablen und ihre Auswirkung auf das Einkommensniveau.

Die notwendigen Konstellationen, die mit alternativen Sparquoten verbunden sein müssen, lassen sich an der nach s aufgelösten Gleichung (80) erkennen:

$$(90) \quad s = \alpha \cdot \frac{m+n}{T} \cdot \frac{1 - e^{-rT}}{1 - e^{-(m+n)T}}$$

Verschieden hohe Sparquoten determinieren unterschiedlich hohe Kapitaleinsätze, die, wie aus den vorangegangenen Erörterungen

deutlich wurde, auch mit unterschiedlich langer Lebensdauer und verschieden hohen Zinssätzen kombiniert sein müssen. Legt man den Zins autonom fest, so muß auch auf dem Gleichgewichtspfad die Sparquote ihren 'gleichgewichtigen' konstanten Wert besitzen. Aus Gleichung (90) folgt die bekannte Beziehung, daß höhere Sparquoten mit einer längeren Lebensdauer korrelieren. Allerdings sind dabei bestimmte Grenzen zu beachten, die durch das Verhältnis von Zins und Wachstumsrate gesetzt werden.

Wenn die Wachstumsrate $m+n$ höher ist als der Zins r , dann kann die Sparquote den Wert der Produktionselastizität des Kapitals nicht unterschreiten, denn mit $m+n < r$ ist ein Anteil des Kapitals über die Produktionselastizität hinaus verbunden. Das wiederum ist nur gewährleistet, wenn $s > \alpha$. Wenn sowohl Wachstumsrate als auch Zins auf dem Gleichgewichtspfad konstant sind, muß mit einer noch höheren Sparquote auch die Lebensdauer weiter zunehmen. Das kann jedoch nur tendenziell gelten, da eine höhere Lebensdauer auch einen geringeren Zinssatz verlangt. Die Ceteris-paribus Betrachtung kann hier nur als Hilfsmittel einer ökonomischen Interpretation herangezogen werden, korrekte Ergebnisse verlangen die synonyme Veränderung aller Variabler.

In den zwei verschiedenen Verteilungssituationen, d.h. der Anteil des Kapitals am Einkommen ist größer oder kleiner als die Produktionselastizität des Kapitals besteht mit höheren Sparquoten die Tendenz, installierte Anlagen länger im Produktionsprozeß zu lassen. Ist $s > \alpha$, so wächst mit der Erhöhung der Sparquote auch die Lebensdauer an. Ansteigende Lebensdauer ist aber immer das äußere Zeichen der Verbesserung der Verteilungssituation zugunsten des Kapitals. Der Embodiment-Effekt erhöht die Bruttoerlössumme überproportional zur Lohnsumme, der Zins muß folglich kleiner sein, damit die abdiskontierte Bruttoerlössumme wieder mit dem Anschaffungswert übereinstimmt. Je höher die Sparquote in dieser Situation ist, desto mehr übertrifft der Kapitaleinkommensanteil jenen, der ihm gemäß seiner Produktionselastizität zusteht. Ist dagegen $s < \alpha$, so steigt mit höheren Sparquoten auch die Lebensdauer und damit der Anteil des Kapitals. Nur liegt jetzt der Anteil immer unter dem Wert der Produktionselastizität.

Diese Auswirkungen alternativer Sparquoten auf die Lebensdauer, Zins und Verteilung sind nur ein anderer Ausdruck für die Beeinflus-

sung des Einkommensniveaus. Da die Vergrößerung von s über den Embodiment-Effekt das Einkommen überproportional zur proportionalen Maschinenzahlerhöhung zunehmen läßt, kann über eine höhere Investitionsquote ein absolut höheres Einkommen realisiert werden. Wie aus (28) hervorgeht, erhöht sich Y_0 aufgrund einer gestiegenen Sparquote nach Maßgabe von $\alpha/(1-\alpha)^{1/2}$. Je höher also die Produktionselastizität des Kapitals ist, um so eher läßt sich durch eine Erhöhung der Sparquote das absolute Einkommensniveau vergrößern. Aber eine Erhöhung der Sparquote ist gleichzeitig mit einer Zunahme der Lebensdauer verbunden. Das wird an folgendem Beispiel klar: Ist die Lebensdauer der Anlagen sehr gering, dann muß an den relativ neuen Anlagen eine hohe Arbeitsintensität herrschen, die bei höherer Lebensdauer der Anlagen vermindert werden könnte. Die dazu notwendige Substitution wird in Verbindung mit dem Embodiment-Effekt eine Produktivitätserhöhung bewirken, obwohl auch jetzt ältere Anlagen zum Einkommen beitragen. Wenn dagegen die Lebensdauer zu stark vergrößert wird, dann wird die Arbeit an den älteren in Betrieb befindlichen Anlagen derart ineffizient, daß hiervon negative Auswirkungen ausgehen, die trotz des höheren Kapitalstocks die Produktivität senken²⁾. Dieser Sachverhalt wird aus (28) deutlich, wenn die durch höhere Sparquoten hervorgerufenen Werte der Lebensdauer T in den konstanten Faktor $A = (1 - e^{-(m+n)T}) / (1 - e^{-nT})$ berücksichtigt werden. Gleichung (28) umformuliert ergibt:

$$(91) \quad Y_0 = nL_0 s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{(1 - e^{-(m+n)T})^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1 - e^{-nT}}$$

Wenn T mit s positiv korreliert, so wird eine anfangs geringe Lebensdauer T (d.h. bei einer geringen Spartätigkeit) durch ihre Erhöhung positiv zur Steigerung von Y_0 beitragen. Mit wachsendem T nehmen diese Steigerungsraten ab, da in (91) der Bruch zwar zuerst absolut steigt, dann ein Maximum erreicht, um schließlich wieder abzunehmen.

Mathematisch korrekt läßt sich der Extremwert für $\frac{\partial Y}{\partial T}$ durch Logarithmieren aus (91) gewinnen. Dieser - hier nicht durchgeführte Vorgang - wird anzeigen, daß $\frac{\partial Y}{\partial T}$ so lange positiv ist, wie der Einkommensanteil der Arbeit seine Produktionselastizität überschreitet³⁾. Die daraus erwachsende Konstellation der Variablen

1) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 283.

2) Massel, B.F., Investment...a.a.O., S. 247.

3) Phelps, E.S., Substitution...a.a.O., S. 283.

$s(\alpha$ und $r)(m+n)$ läßt bei Gültigkeit des Modells gerade für hoch entwickelte Volkswirtschaften die Bedeutung einer Erhöhung der Sparquote erkennen, durch die zwar nicht die Wachstumsrate endgültig, jedoch das absolute Niveau erhöht werden kann.

Damit kann die Darstellung des vielleicht wirklichkeitsnächsten der Vintage-Modell als abgeschlossen angesehen werden. Offensichtlich ist auch hier noch eine Reihe von Modifikationen möglich, vor allem hinsichtlich einer Produktionsfunktion in Form der CES-Funktion und des Einbaus eines induzierten Fortschritts. Hier galt es nur, die am engsten mit dem neoklassischen Modell verbundenen Probleme aufzuzeigen.

So lange an der Cobb-Douglas Funktion für den einzelnen Jahrgang und an dem autonomen Charakter des technischen Fortschritts festgehalten wird, können auf jeden Fall fast alle dem einfachsten Modell typische Eigenheiten auch hier im komplizierteren Vintage-Fall wiedergefunden werden.

Der Vollständigkeit halber soll zum Abschluß die Substituierbarkeit auch ex-ante aufgehoben werden, obwohl damit eigentlich eine der typischen Annahmen der neoklassischen Wachstumsmodells nicht mehr berücksichtigt wird. Dennoch läßt sich bei sonst gleichbleibenden Voraussetzungen auch unter diesen Bedingungen eine durch Fortschritt und Arbeitswachstum determinierte gleichgewichtige Entwicklung des Einkommens nachweisen.

3.7. Der clay-clay Vintage-Fall.

Im Rahmen des clay-clay Vintage-Modells sind sowohl im Installationszeitpunkt als auch während der gesamten Lebensdauer die Faktoren in ihrem Einsatzverhältnis zueinander invariant. Eine Substitution ist nirgendwann möglich, es herrscht die "fixed coefficients rule: any concrete unit of capital has a given output capacity and requires a given complement of labor"¹⁾. Der kapitalgebundene technische Fortschritt macht wiederum den Faktor Kapital zu einem heterogenen Input; der wesentliche Effekt einer Vergrößerung der Bruttoinvestition besteht darin, den Kapitalstock zu modernisieren.

Auch hier kommt es zu einem ökonomisch begründeten Ausscheidungsprozeß unrentabler Maschinenjahrgänge, denn die mit dem Embodiment-Effekt einhergehende Arbeitsproduktivitätserhöhung an neu installierten Anlagen wird sich abermals im steigenden Lohn widerspiegeln. Ebenso wie im vorangegangenen putty-clay Fall führt eine vollkommen abgebaute Quasirente zum Ausscheiden infolge Verschrottens. Zu der bereits bekannten ex-post Limitationalität tritt jetzt auch das im Installationszeitpunkt vorher bestimmte Einsatzverhältnis hinzu. "For a business investing in new capital, only one pair of these coefficients, the pair which will characterize this capital so long as it is operating, is available"²⁾. Die Limitationalität ist unter Miteinbeziehung technischen Fortschritts nicht derart eng zu fassen, daß das Kapital-Arbeits-Einsatzverhältnis über alle Perioden hinweg unverändert ist, sondern es ist nur für den Installationszeitpunkt durch die Koeffizienten vorbestimmt. Diese Koeffizienten werden jedoch selbst durch den technischen Fortschritt beeinflusst. Bei konstanter Wachstumsrate des technischen Wissens muß somit auch die Kapitalintensität - determiniert durch die Koeffizienten - eine gleichförmige Entwicklung durchmachen. Die Benutzung einer älteren Produktionsmethode ist zwar theoretisch immer möglich, bei rationalem Unternehmerverhalten jedoch dadurch ausgeschlossen, daß die Unternehmer gewillt sind, immer die modernste Anlage einzusetzen.

1) Solow, R.M., Tobin, J., von Weizsäcker, C.Ch., Yaari, M., Neoclassical Growth with Fixed Factor Proportions, in: The Review of Economic Studies, Vol. 33, 1966, S. 79.

2) derselbe, S. 80.

3.7.1. Die aus der Annahme der ex-ante und ex-post Limitationalität erwachsenden Eigenheiten.

Unter den Bedingungen der ex-ante und ex-post Limitationalität folgt aus der Produktionsfunktion (3) in 3.4.2. als Grundlage des Wachstumsmodells die Funktion

$$(1) \quad Q_v = \text{Min} (k_v K_v, a_v L_v)$$

die die das Einsatzverhältnis bestimmenden Koeffizienten miteinschließt. Beziehung (1) abstrahiert von Abschreibungen und unterstellt somit ewige Haltbarkeit des Kapitals. Da ein bestimmtes Verhältnis von Arbeit und Kapital im Installationszeitpunkt und für die gesamte Nutzungsdauer optimal ist, besteht nur an der Situation

$$(2) \quad Q_v = a_v L_v = k_v K_v$$

Interesse. Jeder andere Einsatz als K_v und L_v ist ineffizient, da nur in einer Kombination gemäß der Arbeits- und Kapitalproduktivität ein Mehreinsatz an Faktoren den Output erhöhen kann. Aus (2) wird deutlich, daß mit dem Einsatz von K_v Mengen an Kapitaleinheiten k_v Einheiten des Outputs erstellt werden können. Gleichzeitig muß der Kapitaleinsatz dazu mit k_v/a_v Arbeitseinheiten kombiniert sein. Ist der technische Fortschritt weiterhin Harrod-neutral und vollzieht er sich in der Zeit mit konstanter Rate, dann muß der Arbeitseinsatz - gesteuert durch die sich mit v ändernde Arbeitsproduktivität - an neuen Anlagen immer relativ geringer sein als an einer zu einem früheren Zeitpunkt installierten.

Während bisher in den Vintage-Modellen stillschweigend Vollbeschäftigung der Faktoren wegen der wenigstens teilweise möglichen Substituierbarkeit unterstellt werden konnte, so bedarf die Beschäftigungssituation im vorliegenden Modell besonderer Beachtung, da von ihr - unter anderem - die Existenz eines gleichgewichtigen Wachstumspfades entscheiden abhängt. Die Limitationalität der Faktoren macht es eben unmöglich, durch Substitutionsvorgänge verschiedene Faktorkombinationen effizient einzusetzen. Dennoch

vermag eine unterschiedlich lange Lebensdauer der Anlagen regulierend auf das Gesamtarbeitsangebot einwirken, da über den Freisetzungseffekt von Arbeit an verschrotteten Maschinen das im Installationszeitpunkt einsatzfähige Arbeitspotential manipuliert werden kann.

Das gesamte Arbeitsangebot L ist exogen bestimmt und muß nicht notwendigerweise mit der tatsächlich beschäftigten Arbeit M übereinstimmen. Da wegen der Limitationalität der Faktoren die Höhe der in der Vergangenheit vorgenommenen Bruttoinvestitionen über den möglichen Arbeitseinsatz entscheidet, wird die maximale Beschäftigung M^* durch (3) determiniert¹⁾:

$$(3) \quad M^* = \int_{-\infty}^L \frac{1}{a_v} K_v dv$$

Wird das physisch ewig haltbare Kapital auch unendlich lange genutzt, dann zeigt (3) die maximale Beschäftigung an. Hat M^* dabei einen endlichen Wert, dann sind drei Fälle denkbar:

I. $L > M^* = M$

Dies ist der Fall eines Angebotsüberschusses, da das Arbeitsangebot größer ist als die aufgrund aller vergangenen Investitionsvorgänge mögliche Beschäftigung, die tatsächlich schon verwirklicht ist. Wäre $L=M^*$, so würde in dieser Situation derart Gleichgewicht herrschen, daß das Gesamtangebot an Arbeit unter Benutzung alles einmal investierten Kapitals gerade beschäftigt wird. Dieser Fall I ist für moderne Volkswirtschaften unrealistisch und soll infolgedessen auch keine weitere Beachtung finden.

II. $M = L < M^*$

Angebot und Beschäftigung stimmen (bei einem bestimmten Lohn) überein, obwohl der physisch vorhandene Kapitalstock einen höheren Arbeitseinsatz ermöglichen würde.

III. $M < L < M^*$

In diesem Fall ist die Beschäftigung geringer als das Arbeitsan-

1) Solow, R.M. u.a., Neoclassical Growth...a.a.O., S. 83.

gebot, obwohl der Kapitalstock eine das zu große Angebot an Arbeitskräften übertreffende Beschäftigung zulassen würde¹⁾.

Damit stellt sich das Problem, wie die angebotene Arbeit auf das verfügbare Kapital verschiedener Jahrgänge verteilt wird. Sollen alle vorhandenen Maschinen benutzt werden, d.h. auch mit Arbeit kombiniert werden, oder sollen einige Jahrgänge brachliegen? Angenommen ein Jahrgang u ist nicht in Betrieb, ein anderer Jahrgang v wird dagegen genutzt. Wenn diese Verteilung optimal ist, so darf durch Reallokation einer Arbeitseinheit von Jahrgang v nach u keine Erhöhung des Outputs möglich sein. Gemäß dem konstanten Koeffizienten k in v und u wird die Faktorverschiebung den Output um $k(u)$ erhöhen und um $k(v)$ senken. Wenn $k(u) < k(v)$ ist, dann wird diese Reallokation der Arbeit unterbleiben. Das ist immer der Fall, wenn die neuen Maschinen durch den Embodiment-Effekt effizienter sind als die alten, d.h. $k'(v) > 0$. Nur dann ist $k(v) > k(u)$ und kein Jahrgang bleibt ungenutzt, so lange noch ein älterer in Betrieb ist²⁾.

Ein Planer in einem zentralwirtschaftlichen System würde somit zuerst den neuesten Jahrgang t , dann den Jahrgang $t-1$, $t-2$... mit Arbeitseinheiten versehen, bis die gesamte angebotene Arbeit verteilt ist³⁾.

Aber auch im marktwirtschaftlichen System kommt diese Verteilung zustande, nur daß hier unter der Voraussetzung der vollständigen Konkurrenz der Faktorpreis Lohn die Aufteilung des knappen Faktors Arbeit steuert. Nur im Fall I, wenn $L > M^* = M$ ist, versagt dieser Steuerungsmechanismus. In den anderen, wirklichkeitsnäheren Fällen determiniert die Lohnhöhe die Rentabilität der Maschinen - ebenso wie im Fall mit ex-ante Substitutionalität und ex-post Limitationalität -. Der Arbeitseinsatz und der Lohn bestimmen die am einzelnen Jahrgang anfallenden Bruttoerlöse. Das Lebensalter der Maschinen determiniert also unter clay-clay Bedingung die Höhe der tatsächlichen Beschäftigung:

$$(4) \quad M(t) = \int_{t-T}^t \frac{k_v}{a_v} K_v dv.$$

Entsprechend bildet sich auch das Gesamteinkommen aus der Summe der Outputs aller in Betrieb befindlicher Maschinenjahrgänge:

1) Solow, R.M. u.a., Neoclassical Growth...a.a.O., S. 83.

2) ebenda.

3) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen Theorie...a.a.O., S.19.

$$(5) \quad Y_t = \int_{t-T}^t k_v K_v dv.$$

Da die Lebensdauer der Maschinen durch den Lohn mitbestimmt wird, dieser aber wiederum im Rahmen der Grenzproduktivitätstheorie mit der gesamtwirtschaftlichen Grenzproduktivität der Arbeit übereinstimmen muß, läßt sich mit Hilfe dieser Fiktion über den Lohn die Höhe der Grenzproduktivität der Arbeit ableiten, obwohl dem die Annahme der Limitationalität eigentlich widerspricht. Aus der Sicht eines technokratischen Planers würde eine weitere Arbeitseinheit den Gebrauch von älteren Anlagenjahrgängen möglich machen, die bisher nicht mehr zum Gesamteinkommen Y beigetragen haben. Dadurch ergäbe sich eine Zunahme des Einkommens von der Höhe des Outputs des über $t-T$ hinaus in Betrieb genommenen Jahrgangs, d.h. aber das Einkommen erhöht sich um die Durchschnittsproduktivität der Arbeit des Jahrgangs $t-T$. Die Grenzproduktivität der Arbeit für die gesamte Wirtschaft ist identisch mit der Durchschnittsproduktivität des ältesten Anlagenjahrgangs¹⁾. Dies läßt sich auch formal nachweisen, wenn (5) nach T differenziert wird und anschließend die Ableitung von M nach $-$ aus (4) - gebildet wird:

$$(6) \quad \frac{\partial Y}{\partial T} = k_{t-T} \cdot K_{t-T}.$$

Das Differential $\frac{\partial T}{\partial L}$ ist über den Umweg $\frac{\partial L}{\partial T}$ aus (4) erhältlich:

$$(7) \quad \frac{\partial L}{\partial T} = \frac{k_{t-T}}{a_{t-T}} \cdot K_{t-T}.$$

Da der reziproke Wert von $\frac{\partial L}{\partial T}$ gesucht wird, ergibt sich:

$$(8) \quad \frac{\partial T}{\partial L} = \frac{1}{\frac{k_{t-T}}{a_{t-T}} \cdot K_{t-T}}$$

Die Grenzproduktivität ist nun gleich $\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial Y}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial L}$:

$$(9) \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = k_{t-T} \quad 2)$$

Eine gesamtwirtschaftliche Grenzproduktivität des Kapitals ist nicht abzuleiten, da sich der Kapitalstock aus lauter heterogenen

1) Solow, R.M. u.a., Neoclassical Growth...a.a.O., S. 84/85.

2) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen Theorie...a.a.O., S.20.

Kapitaleinheiten zusammensetzt. Aber durch den Umweg über die interne Verzinsung lassen sich die Zusammenhänge doch etwas aufhellen. Die Grenzproduktivität des an einem einzelnen Maschinenjahrgang eingesetzten Kapitals muß - ebenso wie im vorangegangenen Modell - mit der internen Verzinsung übereinstimmen. Eine zusätzliche Kapitaleinheit an einem nicht mehr in Betrieb befindlichen Maschinenjahrgang $v > (t-T)$ kann nur dann zur Erhöhung des Outputs beitragen, wenn sie gleichzeitig mit Arbeit gemäß dem Verhältnis k_v/a_v kombiniert wird. Da die Arbeit den knappen Faktor darstellt, muß Arbeit von anderen, noch benutzten Anlagen abgezogen werden. Da $k'_v > 0$ ist, wird der Zuwachs zum Output geringer sein als die Verminderung. Eine weitere Kapitaleinheit an nicht mehr benutzten Jahrgängen führt nicht zu einer Einkommenserhöhung, $\frac{\partial Y}{\partial K}$ ist negativ und damit nicht relevant. Wird dagegen an neuen Jahrgängen, die noch nicht ihren Verschrottungszeitpunkt erreicht haben, eine weitere Kapitaleinheit eingesetzt, so erhöht sich hieraufhin das Einkommen um $k_v - \frac{v}{a_v} a_{t-T}^1$. Unter der Voraussetzung der vollständigen Konkurrenz müssen die Faktorpreise die Höhe der Grenzproduktivitäten besitzen:

$$(10) \quad \ell(t) = k_{t-T}$$

$$(11) \quad r_v(t) = k_v \left(1 - \frac{a_{t-T}}{a_v}\right) \quad v > t-T$$

Ausdruck (11) kennzeichnet die interne Verzinsung des Jahrgangs v im Zeitpunkt t und stimmt mit Formulierung (52) aus 3.6.7. überein, welche den Bruttoerlös zum Kapitaleinsatz ins Verhältnis setzt:

$$R_v(t) = r_v(t) K_v = Q_v - \ell(t) \cdot L_v$$

Da die Lebensdauer T über den Freisetzungseffekt der Arbeit und die Verminderung des Gesamteinkommens durch ausscheidende Anlagen entscheidend für die konstante Entwicklung des Arbeitseinsatzes und des Einkommens ist, kann der Gleichgewichtspfad folglich nur bei konstantem T realisiert werden. Unter dieser Voraussetzung ist weiterhin die Existenz der gleichgewichtigen Wachstumsrate nachzuweisen.

1) Solow, R.M. u.a., Neoclassical Growth...a.a.O., S. 85.

3.7.2. Die Ableitung der gleichgewichtigen Wachstumsrate.

Ebenso wie in allen vorangegangenen Modellen mögen die typischen neoklassischen Annahmen

$$(12) \quad K_t = s Y_t$$

$$(13) \quad L_t = L_0 \cdot e^{nt}$$

Gültigkeit besitzen.

Der Harrod-neutrale Fortschritt verlangt die Konstanz des Kapitalkoeffizienten, d.h. $k_v = k_0$. Das wachsende technische Wissen äußert sich dagegen in einer konstant ansteigenden Arbeitsproduktivität:

$$(14) \quad a_v = a_0 \cdot e^{mv}$$

Damit verändern sich die Gleichungen (4) und (5) zu:

$$(15) \quad M_t = \frac{k_0}{a_0} \int_{t-T}^t K_v \cdot e^{-mv} dv$$

$$(16) \quad Y_t = k_0 \int_{t-T}^t K_v dv$$

Der Wachstumsprozeß kann nur dann störungsfrei sein, wenn auch der Kapitalstock K mit einer konstanten Rate zunimmt. Angenommen, diese Rate sei g , so gilt $K_t = K_0 e^{gt}$. Wie groß g endgültig sein muß, läßt sich unter Berücksichtigung dieser Rate für K durch die Ableitung von (15) nach t bei unverändertem T feststellen:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{k_0}{a_0} \left(K_t e^{-mT} - K_{t-T} \cdot e^{-m(t-T)} \right)$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{k_0}{a_0} K_0 (1 - e^{-(g-m)T}) \cdot e^{(g-m)t}$$

Wenn die beschäftigte Arbeit mit der angebotenen übereinstimmt, ergibt sich zur Bestimmung der Wachstumsrate des Kapitalstocks unter der Verwendung der Ableitung von (13) nach t :

$$(17) \quad L_0 e^{nt} = \frac{k_0 K_0}{a_0 n} \cdot e^{(g-m)t} (1 - e^{-(g-m)T})$$

Ist in (17) $g \neq m+n$, dann kann die Gleichung für verschiedene Zeitpunkte t selbst bei variablem T nicht erfüllt werden. Ist z.B. $g < m+n$ bzw. $g-m < n$, dann muß die linke Seite von (17) mit wachsendem t die rechte Seite übertreffen. Ist dagegen $g > m+n$ bzw. $g-m > n$, so wird im Zeitablauf die Lebensdauer gegen Null gehen, was impliziert, daß irgendwann daraufhin die Bruttoinvestitionen den Output (zusätzlich zum Gesamteinkommen) überschreiten¹⁾. Nur wenn bei konstanter Lebensdauer die Wachstumsrate des Kapitals der Summe von Fortschritt und Arbeitswachstum gleich ist, kann auf die Dauer (17) erfüllt sein, d.h. aber auch störungsfreies Wachstum bestehen.

Für $g-m=n$ bestimmt sich die Höhe des anfänglichen, gleichgewichtigen Arbeitseinsatzes (=Arbeitsangebot) durch

$$(18) \quad L_0 = \frac{k_0 K_0}{a_0 n} (1 - e^{-nT})$$

Der zu Beginn erwähnte Einfluß der Manipulierbarkeit des absoluten Arbeitsangebots wird an (18) deutlich. Je kürzer die Lebensdauer der Anlagen ist, um so höher muß auf einem Gleichgewichtspfad der absolute Arbeitseinsatz sein. Dieser Zusammenhang muß sich selbstverständlich auch im Ausdruck für die Lebensdauer widerspiegeln, wie man ihn durch Logarithmieren aus (18) erhalten kann:

$$(19) \quad T = -\frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{a_0 n L_0}{k_0 K_0} \right)^{2)}$$

Die Lebensdauer T wird um so geringer sein, je höher L_0 ist. Aber das allein genügt nicht. Nur wenn $k_0 K_0$ größer ist als $a_0 n L_0$ hat T einen positiven endlichen Wert, d.h. aber auch nur dann ist eine Entwicklung des Kapitalstocks mit der gleichgewichtigen Rate $m+n$ möglich.

Die Bedeutung der Bedingung $a_0 n L_0 < k_0 K_0$ wird klarer, wenn sie umformuliert wird zu:

1) Solow, R.M. u.a., Neoclassical Growth...a.a.O., S. 86.

2) ebenda.

$$(20) \quad nL_0 e^{nt} < \frac{k_0 K_0 e^{(m+n)t}}{a_0 e^{mt}} \quad 1)$$

Die rechte Seite von (20) gibt für den Zeitpunkt t den Bedarf an Arbeitseinheiten am neuen Anlagenjahrgang t mit dem Kapitaleinsatz $K_t = K_0 e^{(m+n)t}$ an. Dieser wird bestimmt durch die für diesen Moment gültigen Koeffizienten k_0 und $a_t = a_0 e^{mt}$. Sofern die Anlagen eine endgültige Lebensdauer T besitzen, muß das exogene Arbeitswachstum geringer sein, als zur Bestückung der Maschine im Installationszeitpunkt notwendig ist, denn zusätzlich zu dieser exogen gewachsenen Arbeit kommt noch die durch verschrottete Anlagen freigesetzte Arbeit hinzu. Ist das Arbeitswachstum, bestimmt durch n , sehr groß, so kann die dadurch absolut größere Arbeitsmenge nur an brachliegenden Anlagen eingesetzt werden, d.h. die Lebensdauer der Maschine muß höher sein. Dieser Prozeß der Verwendung absolut größerer Arbeitsmengen findet spätestens bei $L=M=M^*$ ein Ende, darüber hinaus befindet sich die Wirtschaft bei gegen Unendlich gehender Nutzungsdauer der Anlagen im Zustand der Unterbeschäftigung.

Ist dagegen Bedingung (20) erfüllt und hat T einen konstanten endlichen Wert, so folgt hieraus auch die Konstanz der internen Verzinsung, die ebenso wie im vorangegangenen Modell mit dem als invariant angenommenen Marktzins übereinstimmen muß:

$$(21) \quad r_t(t) = k_0 (1 - e^{-mT}), \quad da \quad r_t(t) = k_0 \left(1 - \frac{a_0 e^{m(t-T)}}{a_0 e^{mt}}\right)$$

Der Lohn wächst mit der exponentiellen Rate m :

$$(22) \quad l(t) = (a_0 e^{-mT}) e^{mt} \quad 2)$$

Damit das Einkommen bei unveränderter Lebensdauer der Anlagen ebenfalls störungsfrei wächst, dürfen wiederum keine Faktoren überproportional eingesetzt werden, da durch die Limitationalität der Faktoren deren Einsatzverhältnis vorgeschrieben ist. Die Arbeit wächst mit der Rate n und ihre Effizienz erhöht sich gemäß des Zuwachses an technischem Wissen m . Die linear-homogene Produktionsfunktion verlangt nun eine proportionale Vermehrung des

1) Solow, R.M. u.a., Neoclassical Growth...a.a.O., S. 86.

2) ebenda.

Faktors Kapital, welches sich - wie nachgewiesen - entsprechend der Rate $g=m+n$ erhöht. Das durch die Limitationalität determinierte Einsatzverhältnis wird demnach aufrechterhalten und die Anforderung der zugrundegelegten Produktionsfunktion erfüllt, so daß auch das Einkommen mit einer Rate $m+n$ ansteigt. Das bestätigt auch Gleichung (16):

$$Y_t = \frac{J_0 K_0}{m+n} \cdot e^{(m+n)t} \Big|_{t=0}^t$$

$$(23) \quad Y_t = \frac{J_0 K_0}{m+n} (1 - e^{-(m+n)T}) e^{(m+n)t} \quad 1)$$

Aus Gleichung (23) ergibt sich ein gleichgewichtiger Anfangswert für Y_0 von:

$$(24) \quad Y_0 = \frac{J_0 K_0}{m+n} (1 - e^{-(m+n)T})$$

Da $Y_0 = Y_t e^{-(m+n)t}$, läßt sich aus Gleichung (23) und (24) die für den clay-clay Fall charakteristische Beziehung zwischen Lebensdauer und Investitionsquote $J_0/Y_0 = s$ ableiten:

$$(25) \quad s = \frac{J_0}{Y_0} = \frac{m+n}{K(1 - e^{-(m+n)T})} \quad 2)$$

Nach Formulierung (25) müssen Sparquote und Lebensdauer in einem reziproken Verhältnis zueinander stehen. Eine hohe Sparquote muß mit einer geringen Lebensdauer verbunden sein und umgekehrt. Diese Konstellation steht im Gegensatz zu jener unter den Bedingungen des putty-clay Falls.

Der Zusammenhang ist leicht zu verdeutlichen. Eine hohe Sparquote ist Ausdruck einer großen Anzahl von Maschinen. Damit diese mit entsprechend vielen Arbeitseinheiten bestückt werden können, muß auch der absolute Arbeitseinsatz sehr hoch sein. Letzteres ist jedoch nach (18) bei vorgegebener Wachstumsrate n nur bei einem hohen Anfangswert L_0 zu verwirklichen. Dieser hohe Anfangswert kann aber nur bei vergleichsweise geringer Lebensdauer der Anlagen bestehen, da hier die Anzahl der freigesetzten Arbeitskräfte sehr hoch ist.

Da eine enge Beziehung zwischen Sparquote und Lebensdauer besteht, kann offensichtlich auch nur unter einer bestimmten Höhe von s die

1) Solow, R.M. u.a., Neoclassical Growth...a.a.O., S. 86/87.

2) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen Theorie...a.a.O., S.22.

für die gleichgewichtige Entwicklung notwendige positive Lebensdauer T realisiert werden.

Wird in Gleichung (16) Y durch den Quotienten K_t/s ersetzt, so folgt daraus für K_t :

$$(26) \quad K_t = s k_0 \int_{t-T}^t K_v dv.$$

Wird Gleichung (26) bei konstantem T nach t differenziert und werden dann die Grenzen eingesetzt, ergibt sich:

$$\frac{dK}{dt} = s k_0 (K_t - K_{t-T})$$

K_t läßt sich durch $K_0 e^{(m+n)t}$ substituieren:

$$(m+n) K_0 e^{(m+n)t} = s k_0 K_0 e^{(m+n)t} (1 - e^{-(m+n)T})$$

Dieser Ausdruck vereinfacht führt zu dem Ergebnis:

$$(27) \quad 1 - e^{-(m+n)T} = s k_0 (m+n)$$

Wird Gleichung (27) logarithmiert, so folgt hieraus eine Formulierung, an Hand welcher die Kombinationen von Lebensdauer und Sparquote abzulesen sind:

$$(28) \quad T \cdot \frac{1}{m+n} \cdot \ln \frac{s k_0}{s k_0 - (m+n)} \quad 1).$$

Auch hier läßt sich die inverse Beziehung zwischen s und T erkennen, denn je größer s ist, um so mehr nähert sich in (28) der Bruch dem Wert Eins, d.h. um so geringer wird der natürliche Logarithmus. Darüber hinaus macht (28) klar, daß "not all values of s and T are consistent with balanced growth of this kind, at 'natural' rate $g=m+n$ "²⁾. Die Untergrenze für s ist gleich $(m+n)/k_0$, d.h. die Lebensdauer ist gleich Unendlich. Unter dieser Voraussetzung kann alle Arbeit, die infolge der Wachstumsrate n bei einem bestimmten Anfangswert L_0 anfällt gerade noch beschäftigt werden. Die Wachstumsrate des Kapitals $sY_0/K_0 = sk_0$ ist gerade so groß, daß ohne Arbeiter freizusetzen, die neuen Anlagen durch die (in Effizienzeinheiten gemessene) Arbeit bestückt werden können; sk_0 .

1) Allen, R.G.D., Macro-Economic...a.a.O., S. 301.

2) Solow, R.M., Neoclassical Growth...a.a.O., S. 87.

stimmt damit mit der Wachstumsrate der Arbeit $m+n$ überein. Damit andererseits aus der Sicht der Unternehmer es lohnend ist, auch die ältesten Anlagen noch im Produktionsprozeß zu lassen, muß der Lohn gleich Null sein. Das trifft für T gleich Unendlich nach (22) auch zu:

$$l(t) - (a_0 \cdot e^{-\omega}) e^{mt} = 0$$

Der Einfluß der Beschäftigungssituation wird noch deutlicher, wenn die Sparquote sehr gering ist, so daß die Situation $sk_0, m+n$ vorliegt. Gleichung (26) fordert daraufhin den ökonomisch irrelevanten Wert einer negativen Lebensdauer. Dieses mathematisch korrekte Ergebnis ist Ausdruck der Inkonsistenz des Modells mit einer störungsfreien Entwicklung: Wenn kein Kapital ökonomisch unrentabel wird, dann wächst der Kapitalstock mit der Rate sk_0 . Damit aber das Arbeitsangebot, welches mit n -Prozent anwächst, von den Maschinen, die infolge technischen Fortschritts m -Prozent weniger Arbeitseinheiten benötigen, aufgenommen werden kann, müßte der Kapitalstock um $(m+n)$ -Prozent zunehmen. Wenn nun die tatsächliche Wachstumsrate jedoch geringer ist, dann sind die neuen Anlagen ungenügend groß, d.h. die Anzahl der Maschinen zu klein, als daß die angewachsene Arbeit beschäftigt werden könnte. Ist die Situation noch derart ungleichgewichtig, daß ältere, brachliegende Anlagen vorhanden sind, besteht die Möglichkeit, immer ältere Anlagen in Betrieb zu nehmen. Das äußere Anzeichen der steigenden Effizienz dieser Anlagen ist der sinkende Lohn. Sind jedoch diese Möglichkeiten voll ausgeschöpft, gerät die Wirtschaft unweigerlich in einen Zustand der Unterbeschäftigung.

Abschließend sei der Vollständigkeit halber die Beziehung zwischen Zins und Lebensdauer untersucht. Nach (11) ist der interne Zins auf dem Gleichgewichtspfad konstant, d.h. aber auch in Analogie zum putty-clay Fall, daß der Marktzins unverändert sein muß. Diese Gleichgewichtsbedingung allein gestattet den Unternehmern in einer sich störungsfrei entwickelnden Volkswirtschaft, die Anfangswerte des Kapitaleinsatzes wiederzugewinnen.

Der Bruttoerlös eines Maschinenjahrgangs v im Zeitpunkt t entspricht der Differenz $Q_v - l(t)L_v$. Umformuliert mit Hilfe von k_0 und a_0 folgt hieraus:

$$(29) R_v(t) = k_0 - \frac{k_0}{a_0} \cdot L(t) = k_0 - a_0 e^{-mv} \cdot \frac{k_0}{a_0} \cdot e^{m(t-T)} = k_0 - k_0 e^{m(t-T-v)}$$

wobei $t-T < v < t$ sein muß. Wenn der Gegenwartswert aller zukünftigen Quasirenten der neuen Maschine gleich ihrem Anschaffungswert ist, herrscht das früher schon beschriebene Gleichgewicht. "Der Preis ist nach der Definition der Maschine gleich eins, wenn man, wie bisher schon getan, das Produkt als Werteinheit ansieht"¹⁾. Beim Zinssatz r gilt ebenso wie im Vintage-Modell unter putty-clay Bedingungen:

$$(30) 1 = \int_v^T R_v(t) \cdot e^{-r(t-v)} dt + k_0 \int_t^{t+T} (1 - e^{m(t-T-v)}) e^{-r(t-v)} dt$$

$$(31) = k_0 \frac{1 - e^{-rT}}{r} - e^{-mT} \frac{1 - e^{(m-r)T}}{r-m} \quad 2)$$

Gleichung (31) zeigt nun die für alternative T relevanten Werte von r . Je höher T ist, um so größer muß auch r sein. Da mit steigender Lebensdauer die Bruttoerlöse der Anlage zunehmen, d.h. aber auch der Wert des Integrals in Gleichung (30) anwächst, kann die Bedingung: abdiskontierte Bruttoerlöse gleich Eins, nur dann aufrechterhalten werden, wenn mit der Lebensdauer auch der Zins ansteigt.

Die normale Beziehung: hohe Lebensdauer - niedrige Ersparnis - hoher Zins ist also unter clay-clay Bedingungen gewahrt. Der Begriff moderne Maschine ist wegen der fehlenden Substitutionsmöglichkeit weniger komplex. Im Modell besteht jede Investition im Auswechseln einer älteren Maschine durch eine neue, das Phänomen des 'capital-deepening' hat im Gegensatz zum vorangegangenen Modell keine Bedeutung³⁾. Das ist letztlich auch die Ursache für die oben nachgewiesene 'normale' Beziehung zwischen Lebensdauer, Zins und Sparquote.

Damit findet die Betrachtung der Vintage-Modelle ihr Ende. Wesentlich für die vorliegende Arbeit war der Nachweis, daß auch von kapitalgebundenem Fortschritt nicht unbedingt Störungen der gleichgewichtigen Entwicklung ausgehen müssen. Einzige Bedingung hierzu ist neben den ursprünglichen Annahmen des neoklassischen Modells die Konstanz der neu hinzutretenden Variablen 'Lebensdauer'. Die

1) von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen Theorie...a.a.O., S.23.

2) derselbe S. 24.

3) derselbe S. 23.

Form der Wachstumsrate, d.h. die Bestimmung des Einkommenszuwachses allein aus technischem Fortschritt und Arbeitswachstum, wird durch die Annahme eines kapitalgebundenen technischen Wissens nicht berührt. Unterschiede treten nur in der absoluten Höhe des Einkommens auf.

Der entscheidende Fortschritt der Verwendung des 'embodied technical progress' liegt jedoch mehr auf dem kapitaltheoretischen als auf dem wachstumstheoretischen Gebiet. Inwieweit jedoch das eine zuerst das andere beeinflusst hat, mündet in die uralte Frage, ob zuerst die Henne oder zuerst das Ei da war.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- Allen, R.G.D., Mathematik für Volks- und Betriebswirte,
Berlin 1956.
- Allen, R.G.D., Macro-Economic Theory, New York 1967.
- Arrow, K.J., Capital-Labor Substitution and Economic
Chenery, H.B., Efficiency, in: The Review of Economics
Minhas, B.S., and Statistics, Vol. 43, 1961.
- Solow, R.M.,
- Beckmann, M., Einkommensverteilung und Wachstum bei
nicht-neutralem technischen Fortschritt,
in: Jahrbücher für Nationalökonomie und
Statistik, Bd. 178, 1965.
- Beckmann, M., Wirtschaftliches Wachstum bei abnehmen-
dem Skalenertrag, in: Theorien des ein-
zelwirtschaftlichen und gesamtwirtschaft-
lichen Wachstums, Schriften des Vereins
für Socialpolitik, N.F. Bd. 34, Berlin
1965.
- Black, J., The Technical Progress Function and the
Production Function, in: Economica, N.S.
Vol. 29, 1962.
- Bombach, G., Die verschiedenen Ansätze der Verteilungs-
theorie, in: Einkommensverteilung und
technischer Fortschritt, Schriften des
Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 17,
Berlin 1959.
- Bombach, G., 'Wirtschaftswachstum', in: Handwörterbuch
der Sozialwissenschaften, Bd. 12, Tübin-
gen-Göttingen 1965.
- Bronstein, J.N., Taschenbuch der Mathematik, 7. Aufl.,
Semendjajew, K.A., Zürich und Frankfurt/M. 1967.
- Cobb, C.W., A Theory of Production, in: The American
Douglas, P.H., Economic Review, Vol. 18, Papers and Pro-
ceedings, 1928.
- Conlisk, J., Unemployment in a Neoclassical Growth
Model: The Effect on Speed of Adjustment,
in: The Economic Journal, Vol. 76, 1966.

- Dickinson, H.D., A Note on Dynamic Economics, in: The Review of Economic Studies, Vol. 22, 1954 - 55.
- Domar, E.D., Essays in the Theory of Economic Growth, New York 1957.
- Elsner, K., Wachstums- und Konjunkturtheorie, in: Kompendium der Volkswirtschaftslehre, Bd. 1, Göttingen 1967.
- Ferguson, C.E., The Elasticity of Substitution and the Savings Ratio in the Neoclassical Theory of Growth, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 79, 1965.
- Hahn, F.H.,
Matthews, R.C.O., The Theory of Economic Growth: A Survey, in: Surveys of Economic Theory, Vol. 2, New York 1965.
- Harrod, R.F., An Essay in Dynamic Theory, in: The Economic Journal, Vol. 49, 1939.
- Harrod, R.F., Joan Robinson: Essays in the Theory of Employment, in: The Economic Journal, Vol. 47, 1937.
- Harrod, R.F., Dynamische Wirtschaft, Wien 1949.
- Helmstädter, E., Die Isoquanten gesamtwirtschaftlicher Produktionsfunktionen mit konstanter Substitutionselastizität, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 176, 1964.
- Hicks, J., The Theory of Wages, 2. Aufl., New York 1948.
- Johansen, L., Substitution versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth, in: Econometrica, Vol. 34, 1966
- Johnson, H.G., The Neo-Classical One-Sector-Growth Model: A Geometrical Exposition and Extension to an Monetary Economy, in: Economica, N.S. Vol. 33, 1966.
- Jones, R.W., "Neutral" Technological Change in the Isoquant Map, in: The American Economic Review, Vol. 55, 1965 I.

- Kaldor, N., A Model of Economic Growth, in: The Economic Journal, Vol. 67, 1957.
- Kemp, M.C.
Thánh, P.C., On a Class of Growth Models, in: Econometrica, Vol. 34, 1966.
- Kendrick, J.W.,
Sato, R., Factor Prices, Productivity, and Economic Growth, in: The American Economic Review, Vol. 53, 1963.
- Massel, B.F., Investment, Innovation, and Growth, in: Econometrica, Vol. 30, 1962.
- Meade, J.E., A Neo-Classical Theory of Economic Growth, 2. Aufl., London 1962.
- Minami, R., A Model of Economic Development from Classical to Neo-Classical Stages, in: Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 97, 1966.
- Minami, R., Economic Growth and Labour Supply, in: Oxford Economic Papers, N.S. Vol. 16, 1964.
- Niehans, J., Economic Growth with two Endogenous Factors, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 77, 1963.
- Oppenländer, K., Die moderne Wachstumstheorie, Berlin und München, 1963.
- Ott, A.E., Produktionsfunktion, technischer Fortschritt und Wirtschaftswachstum, in: Einkommensverteilung und technischer Fortschritt, Schriften des Vereins für Socialpolitik, N.F. Bd. 17, Berlin 1959.
- Phelps, E.S., The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen, in: The American Economic Review, Vol. 51, 1961.
- Phelps, E.S., Substitution, Fixed Proportions, Growth, and Distribution, in: The International Economic Review, Vol. 4., 1963.
- Phelps, E.S., The New View of Investment: A Neoclassical Analysis, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 76, 1962.

- Pitchford, J.D., Growth and the Elasticity of Factor Substitution, in: The Economic Record, Vol. 36, 1960.
- Richter, R., "Harrod-Wachstum" und "Solow-Wachstum", ein Vergleich, in: Zeitschrift für die Gesamte Staatswissenschaft, Bd. 121, 1965.
- Riese, H., Faktoreinsatz, technischer Fortschritt und Produktivität, Basel 1966.
- Riese, H., Gleichgewichtiges Wachstum und optimales Wachstum in der neoklassischen Wachstumstheorie, in: Kyklos, Bd. 17, 1964.
- Robinson, J., The Classification of Inventions, in: The Review of Economic Studies, Vol. 5, 1937/38.
- Sato, K., Growth and the Elasticity of Factor Substitution: A Comment - How Plausible is Imbalanced Growth, in: The Economic Record, Vol. 39, 1963.
- Sato, R., The Harrod-Domar Model vs. the Neo-Classical Growth Model, in: The Economic Journal, Vol. 74, 1964.
- Sato, R., Fiscal Policy in a Neo-Classical Growth Model: An Analysis of Time Required for Equilibrating Adjustment, in: The Review of Economic Studies, Vol. 30, 1963.
- Scheper, W., Produktionsfunktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 177, 1965.
- Schmidt, K.-U., Graphisch-mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaften, Meisenheim 1964
- Schneider, E., Einführung in die Wirtschaftstheorie, Bd. II: Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft, 8. Aufl., Tübingen 1963.
- Stalter, W.E.G., Productivity and Technical Change, 2. Aufl., London 1966.

- Solow, R.M., Capital Theory and the Rate of Return, Amsterdam 1963.
- Solow, R.M., Technical Change and the Aggregate Production Function, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 39, 1957.
- Solow, R.M., A Contribution to the Theory of Economic Growth, in: The Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, 1956.
- Solow, R.M., Investment and Technical Progress, in: Mathematical Methodes in the Social Sciences 1959, Stanford 1960.
- Solow, R.M., Tobin, J., von Weizsäcker, C.Ch., Yaari, M., Neoclassical Growth with Fixed Factor Proportions, in: The Review of Economic Studies, Vol. 33, 1966.
- Soper, C.S., The Elasticity of Substitution, in: The Economic Record, Vol. 41, 1965.
- Swan, T.W., Economic Growth and Capital Accumulation, in: The Economic Record, Vol. 32, 1956.
- Tinbergen, J., Zur Theorie der langfristigen Wirtschaftsentwicklung, in: Weltwirtschaftliches Archiv, Bd. 55, 1942 I.
- Uzawa, H., Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium, in: The Review of Economic Studies, Vol. 29, 1960/61.
- Vanek, J., A Theory of Growth with Technological Change, in: The American Economic Review, Vol. 57 I, 1967.
- Vanek, J., Towards a More General Theory of Growth with Technological Change, in: The Economic Journal, Vol. 76, 1966.
- von Weizsäcker, C.Ch., Zur ökonomischen Theorie des technischen Fortschritts, Göttingen 1966.
- von Weizsäcker, C.Ch., Wachstum, Zins und optimale Investitionsquote, Basel und Tübingen 1962.
- Vogt, W., Theorie des wirtschaftlichen Wachstums, Berlin und Frankfurt 1968.

Lebenslauf

Am 7. 8. 1941 wurde ich als Sohn des kaufmännischen Angestellten Emil Baer und seiner Ehefrau Hildegard, geb. Grannas in Landsberg/Warthe geboren. Nach dem Kriegsende siedelten meine Eltern und ich nach Wiesbaden um. Hier wurde ich im Herbst 1947 in die Grundschule am Blücherplatz eingeschult. Ab Ostern 1952 besuchte ich das Realgymnasium am Zietenring, die heutige Leibniz-Schule, an der ich im Frühjahr 1961 die Reifeprüfung ablegte.

Zum Sommersemester 1961 immatrikulierte ich mich an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz zum Studium der Volkswirtschaftslehre. Am 15. 11. 1965 bestand ich an dieser Universität die Prüfung für Diplomvolkswirte.

Im Anschluß daran war ich vom 1. 1. 1966 bis 31. 3. 1967 als Förderungsstipendiat am Institut für Allgemeine- und Außenwirtschaftstheorie, geleitet von Prof. Dr. K. Rose, tätig. seit dem 1. 4. 1967 bin ich mit der Verwaltung einer Assistentenstelle am Seminar für Rechts- und Wirtschaftswissenschaften der Johannes Gutenberg-Universität beauftragt.

Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 20. 12. 1968.

Mainz im Dezember 1968

Gunter Baer

